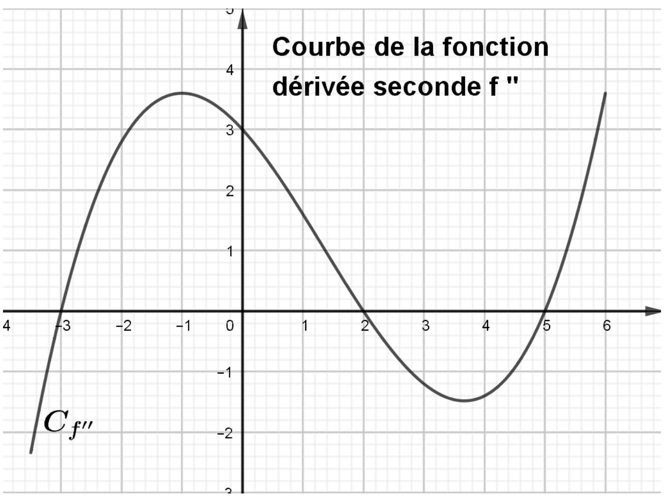
Exercice 1 commun à tous les candidats 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chaque, trois affirmations sont proposées, une seule de ces affirmations est exacte.
Le candidat recopiera sur sa copie le numéro de chaque question et la lettre de la réponse choisie pour celle-ci. AUCUNE JUSTIFICATION n'est demandée. Une réponse fausse ou l'absence de réponse n'enlève aucun point.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x^2-2x-1)e^x$.
A. La fonction dérivée de f est la fonction définie par $f'(x)=(2x-2)e^x$.
B. La fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty;2]$.
C. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

2. On considère considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{3}{5+e^x}$.
Sa courbe représentative dans un repère admet
A. Une seule asymptote.
B. Une asymptote horizontale et une asymptote verticale.
C. Deux asymptotes horizontales.

3. On donne ci-dessous la courbe $C_{f''}$ représentant la fonction dérivée seconde f'' d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle [3,5;6].



A. La fonction f est convexe sur l'intervalle [-3;3].
B. La fonction f admet trois points d'inflexion.
C. La fonction dérivée f' de f est décroissante sur l'intervalle [0;2].

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n=n^2-17n+20$.
A. La suite (u_n) est minorée.
B. La suite (u_n) est décroissante.
C. L'un des termes de la suite (u_n) est égal à 2021.

5. On considère la suite (u_n) définie par $u_0=2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=0{,}75\,u_n+5$.
On considère la fonction « seuil » suivante écrite en Python :

```
def seuil():
  u=2
  n=0
  while u<45:
    u=0.75u+5
    n=n+1
  return n
```

Cette fonction renvoie :
A. La plus petite valeur de n telle que $u_n \geqslant 45$.
B. La plus petite valeur de n telle que $u_n < 45$.
C. La plus grande valeur de n telle que $u_n \geqslant 45$.

CORRECTION

1. **Réponse :** C

Preuve non demandée

A. FAUSSE $f'(x)=(2x-2)e^x+(x^2-2x-1)e^x=(x^2-3)e^x$.

B . FAUSSE f' est positive sur $]-\infty;-\sqrt{3}[$ et sur $]\sqrt{3};+\infty[$
donc f' est croissante sur $]-\infty;-\sqrt{3}[\subset]-\infty;2]$

C. VRAIE $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

2. **Réponse :** C

Preuve non demandée

$f(x)=\dfrac{3}{5+e^x}$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$ et la courbe représentative de f n'admet pas d'asymptote verticale.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{3}{5}=0{,}6$ la droite d'équation $y=0{,}6$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ la droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$.

C. VRAIE deux asymptotes horizontales.

3. **Réponse :** B

Preuve non demandée

A. FAUSSE sur l'intervalle]2;3] $f''(x)<0$ donc f n'est pas convexe sur]2;3].

B. VRAIE f'' s'annule 3 fois en changeant de signe, les abscisses des points d'inflexion sont -3 ; 2 et 5.

C. FAUSSE $f''=(f')'$ f'' est positive sur [0;2] donc f' est croissante sur l'intervalle [0;4].

4. **Réponse :** A

Preuve non demandée

B. FAUSSE $u_{n+1}-u_n=(n+1)^2-17(n+1)+20-n^2+17n-20$

$u_{n+1}-u_n=n^2+2n+1-17n-17+20-n^2+17n-20=2n-16=2(n-8)$

Si $0\leqslant n\leqslant 7$ alors $u_{n+1}-u_n\leqslant 0$ donc $u_0\geqslant u_1\geqslant\ldots\geqslant u_7\geqslant u_8$

Si $n\geqslant 8$ alors $u_{n+1}-u_n\geqslant 0$ donc $u_8\leqslant u_9\leqslant\ldots$

(u_n) n'est pas une suite décroissante.

A. VRAIE u_8 est le plus petit terme de la suite donc (u_n) est minorée par $u_8=-52$.

C. FAUSSE $n^2-17n+2=2021 \Leftrightarrow n^2-17n-2001=0$

$\Delta=17^{+4}\times 2001=289+8003=8293$.

8293 n'est pas un carré parfait donc les solutions de cette équation ne sont pas des entiers naturels.

5. **Réponse :** ?

Preuve non demandée

A. VRAIE ? Il semble que l'on doit donner cette réponse.

Problème

Si on exécute le programme on obtient aucune valeur.
On peut démontrer par récurrence que la suite est majorée par 20 (qui est la limite de cette suite).
Conséquence :
Aucun des termes de la suite est supérieur ou égal à 45.
Par contre si on remplace 45 par 19,5 on obtient n=13.