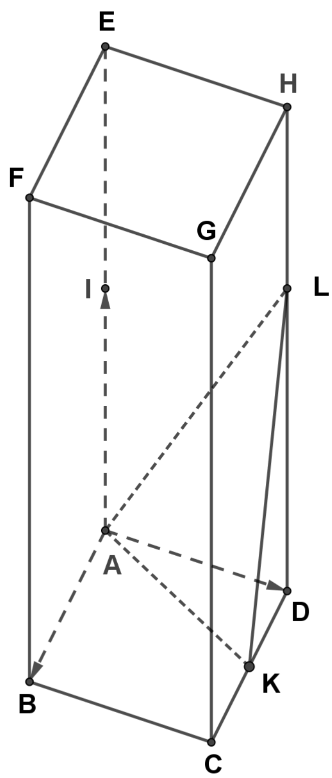
Exercice 2 *commun à tous les candidats* *5 points*

On considère un pavé droit ABCDEFGH tel que $AB=AD=1$ et $AE=2$ représenté ci-dessous.
Le point I est le milieu du segment [AE]. Le point K est le milieu du segment [DC]. Le point L est défini par : $\overrightarrow{DL}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$. N est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).



On se place dans le repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AI}\right)$.

On admet que le point L a pour coordonnées $\left(0;1;\frac{3}{2}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$.

2.a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}6\\-3\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (AKL).

2.b. En déduire une équation cartésienne du plan (AKL).

2.c. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par D et perpendiculaire au plan (AKL).

3.d. En déduire que le point N de coordonnées $\left(\frac{18}{49};\frac{40}{49};\frac{6}{49}\right)$ est le projeté orthogonal du point D sur le plan AKL).

On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par la formule : $\mathcal{V}=\frac{1}{3}\times(\text{aire de la base})\times\text{hauteur}$

3.a. Calculer la volume du tétraèdre ADKL en utilisant le triangle ADK comme base.

3.b. Calculer la distance du point D au plan (AKL).

3.d. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle AKL.

CORRECTION

1. $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AI})$ est un repère orthonormé.

$A(0;0;0)$ $C(1;1;0)$ $D(0;1;0)$ $K\left(\frac{1+0}{2};\frac{1+1}{2};\frac{1+0}{2}\right)$ $K\left(\frac{1}{2};1,0\right)$ $L\left(0;1;\frac{3}{2}\right)$

$\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AL}\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$

2.a. $\vec{n}\begin{pmatrix}6\\-3\\2\end{pmatrix}$

$\vec{n}.\overrightarrow{AK}=6\times\frac{1}{2}\pm3\times1+2\times0=3-3+0=0$ $\vec{n}.\overrightarrow{AL}=6\times0-3\times1+2\times\frac{3}{2}=0-3+3=0$

Les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$ ne sont pas colinéaires.

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (AKL) donc $\vec{n}$ est normal au plan (AKL).

2.b. Le plan (AKL) est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

M(x;y;z) appartient au plan (AKL) si et seulement si $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$ $\Leftrightarrow$ $6\times x-3\times y+2\times z=0$

$(AKL):\ 6x-3y+2z=2$

2.c. Δ est lla droite passant par $D(0;1;0)$ et de vecteur directeur $\vec{n}$

$$\Delta\ :\ \begin{cases}x=6t+0\\y=-3t+1\\z=2t+0\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$$

2.d. Pour déterminer les coordonnées du point N d'intersection de Δ et (AKL) (c'est à dire du projeté orthogonal de D sur le plan (AKL)), on résout le système :

$$\begin{cases}6x-3y+2z=0\\x=6t\\y=-3t+1\\z=2t\end{cases}$$ on obtient : $6\times(6)t-3\times(-3t+1)+2\times(2t)=0$

$\Leftrightarrow\ 36t+9t-3+4t=0\ \Leftrightarrow\ 49t=3\ \Leftrightarrow\ t=\frac{3}{49}$

$x=2\times\frac{3}{49}=\frac{6}{49}$ $y=-3\times\frac{3}{49}+1=\frac{-9+49}{49}=\frac{40}{49}$ $z=2\times\frac{3}{49}=\frac{6}{49}$

$N\left(\frac{18}{49};\frac{40}{49};\frac{6}{49}\right)$

3.a. Le triangle ADK est rectangle en D $AD=1$ (unité de longueur) $AK=\frac{1}{2}$ (unité de longueur).

L'aire du triangle ADK est : $A_1=\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ (unité d'aire).

$[DL]$ est la hauteur du tétraèdre associée à la base ADK. $DL=\frac{3}{2}$

$\mathcal{V}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{2}=\frac{1}{8}$ (unité de volume).

3.b. DN est distance du point D au plan (AKL).

$DN^2=\left(\frac{18}{49}-0\right)^2+\left(\frac{40}{49}-1\right)^2+\left(\frac{6}{48}-0\right)^2=\frac{18^2+(-9)^2+6^2}{49^2}=\frac{441}{49^2}=\left(\frac{21}{49}\right)^2$

$DN=\frac{21}{49}=\frac{3}{7}$.

3.c. A_2 est l'aire (en unité d'aire) du triangle AKL

$\mathcal{V}=\frac{1}{3}\times A_2\times\frac{3}{7}=\frac{1}{7}\times A_2$ or $\mathcal{V}=\frac{1}{8}$

$\frac{1}{8}=\frac{1}{7}\times A_2$ $A_2=\frac{7}{8}$ (en unité d'aire).