## Exercice 3 commun à tous les candidats 5 points

Une société de jeu en ligne propose une nouvelle application pour smartphone nommée « Tickets coeurs!». Chaque participant génère sur son smartphone un ticket comportant une grille de taille 3x3 sur laquelle sont placés trois coeurs répartis au hasard, comme par exemple ci-dessous.

| | | |
|---|---|---|
| | ♡ | |
| ♡ | | |
| | | ♡ |

Le ticket est gagnant si les trois coeurs sont positionnés côte à côte sur une même ligne, sur une même colonne ou sur une même diagonale.

**1.** Justifier qu'il y a exactement $84$ façons différentes de positionner les trois coeurs sur une grille.

**2.** Montrer que la probabilité qu'un ticket soit gagnant est égale à $\frac{2}{21}$.

**3.** Lorsqu'un joueur génère un ticket, la société prélève $1\,€$ sur son compte en banque. Si le ticket est gagnant, la société verse alors au joueur $5\,€$. Le jeu est-il favorable au joueur ?

**4.** Un joueur décide de générer $20$ tickets sur cette application. On suppose que les générations des tickets sont indépendantes entre elles.

**4.a.** Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$ qui compte le nombre de tickets gagnants parmi les $20$ tickets générés.

**4.b.** Calculer la probabilité, arrondie à $10^{-3}$, de l'événement $(X=5)$.

**4.c.** Calculer la probabilité, arrondie à $10^{-3}$, de l'événement $(X \geqslant 1)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

CORRECTION

**1.** On doit choisir au hasard 3 cases parmi 9 cases.
Le nombre de façons différentes de positionner les trois coeurs sur la grille est égal au nombre de parties de 3 éléments d'un ensemble de 9 éléments c'est à dire : $\binom{9}{3}=\frac{9\times 8\times 7}{1\times 2\times 3}=3\times 4\times 7=84$ .

**2.** Le nombre de tickets gagnants est égal à : 3 (contenant 3 coeurs sur la même ligne) + 3 (contenant 3 coeurs sur la même colonne) + 2 (contenant 3 coeurs sur la même diagonale) soit : 8.
La probabilité d'un ticket gagnant est : $\frac{8}{84}=\frac{2}{21}$ .

**3.** Soit G la variable aléatoire égale au gain algébrique pour un ticket.
Si le joueur génère un ticket gagnant alors son gain algébrique (en euro) est égal à $5-1=4$ ( il faut retirer la mise) et $P(G=4)=\frac{2}{21}$ .

Si le joueur génère un ticket perdant alors son gain algébrique (en euro) est égal à -1 et $P(G=-1)=\frac{19}{21}$.

On donne la loi de probabilité de G sous la forme d'un tableau.

| $g_i$ | -1 | 4 |
|---|---|---|
| $P(G=g_i)$ | $\frac{19}{21}$ | $\frac{2}{21}$ |

L'espérance mathématique de G est égale à : $E(G)=-1\times\frac{19}{21}+4\times\frac{2}{21}=\frac{-19+8}{21}=-\frac{11}{21}<0$ .

L'espérance mathématique de G est le gain algébrique, pour chaque ticket, pour un grand nombre de générations de tickets.
$E(G)<0$ donc le jeu est défavorable au joueur.

**4.a.** On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :
Le joueur génère au hasard un ticket.

Succès : « le joueur génère un ticket gagnant » la probabilité de Succès est : $p=\frac{2}{21}$ .

Échec : « le joueur génère un ticket perdant » la probabilité de l'échec est : $q=\frac{19}{21}$ .

Les générations sont indépendantes entre-elles.
On génère 20 tickets donc la variable aléatoire X égale au nombre de succès en 20 épreuves suit la loi binomiale de paramètres $n=20$ et $p=\frac{2}{21}$ .

**4.b.** $P(X=5)=\binom{20}{5}\left(\frac{2}{21}\right)^5\times\left(\frac{19}{21}\right)^{15}=0{,}027$ à $10^{-3}$ près.

**4.c.** L'événement contraire de $(X\geqslant 1)$ est l'événement $(X=0)$.
$P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)=1-0{,}135=0{,}865$ à $10^{-3}$ près.
Le joueur a 86,5 % de chance de générer au moins un ticket gagnant parmi les 20.