Exercice A au choix du candidat 5 points

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A et B.
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.
Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

EXERCICE A

Principaux domaines abordés: **Suites - Equations différentielles**

Dans cet exercice, on s'intéresse à la croissance du bambou Moso de taille maximale 20 mètres. Le modèle de croissance de Ludwig von Bertalanffy suppose que la vitesse de croissance pour un tel bambou est proportionnelle à l'écart entre sa taille et la taille maximale.

Partie 1 : modèle discret

Dans cette partie, on observe un bambou de taille initiale 1 mètre.
Pour tout entier naturel n, on note u_n la taille, en mètre, du bambou n jours après le début de l'observation.
On a ainsi $u_0=1$.
Le modèle de von Bertalanffy pour la croissance du bambou entre deux jours consécutifs de traduit par l'égalité : $u_{n+1}=u_n+0{,}05(20-u_n)$ pour tout entier naturel n.

1. Vérifier que $u_1=1{,}95$.

2.a. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=0{,}95\,u_n+1$.

2.b. On pose pour tout entier naturel n, $v_n=20-u_n$. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le terme initial u_0 et la raison.

2.c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n=20-19\times 0{,}95^n$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie 2 : modèle continu

Dans cette partie, on souhaite modéliser la taille du même bambou Moso par une fonction donnant sa taille, en mètre, en fonction du temps t exprimé en jour. D'après le modèle de von Bertalanfly, cette fonction est solution de l'équation différentielle (E) : $y'=0{,}05(20-y)$ où y désigne une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0;+\infty[$ et y' désigne sa fonction dérivée.
Soit la fonction L définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $L(t)=20-10\,e^{-0{,}05\,t}$.

1. Vérifier que la fonction L est une solution de (E) et qu'on a également $L(0)=1$.

2. On prend cette fonction L comme modèle et on admet que, si on note L' sa fonction dérivée, $L'(t)$ représente la vitesse de croissance du bambou à l'instant t.

2.a. Comparer $L'(0)$ et $L'(5)$.

2.b. Calculer la limite de la fonction dérivée L' en $+\infty$. Ce résultat est-il en cohérence avec la description du modèle de croissante exposé au début de l'exercice ?

CORRECTION

Partie 1

1. $u_0=1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=u_n+0,05(20-u_n)$.
$u_1=u_0+0,05(20-u_0)=1+0,05\times 19=1+0,95=1,95$.

2.a. Pour tout entier naturel n :
$u_{n+1}=u_n+0,05(20-u_n)=u_n+0,05\times 20-0,05\,u_n=(1-0,05)\,u_n+1=0,95\,u_n+1$.

2.b. Pour tout entier naturel n, $v_n=20-u_n \Leftrightarrow u_n=20-v_n$.
$v_{n+1}=20-u_{n+1}=20-(0,95\,u_n+1)=20-0,95\,u_n-1=19-0,95(20-v_n)=19-0,95\times 20+0,95\,v_n$
$v_{n+1}=19-19+0,95\,v_n=0,95\,v_n$
(v_n) est la suite géométrique de raison 0,95 et de premier terme $v_0=20-u_0=20-1=19$.

2.c. Pour tout entier naturel n, $v_n=v_0\times q^n=19\times 0,95^n$
donc $u_n=20-v_n=20-19\times 0,95^n$

3. $0\leqslant 0,95<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,95^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=20$.

Partie 2

1. (E): $y'=0,05(20-y)$
Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0;+\infty[$, $L(t)=20-19\,e^{-0,05\,t}$.
$(e^u)'=u'\times e^u$ $\quad(e^{-0,05\,t})'=-0,05\,e^{-0,05\,t}$
$L'(t)=-19\times(-0,05\,e^{-0,05\,t})=1,95\,e^{-0,05\,t}$.
On a $0,05(20-L(t))=0,05(20-19\,e^{-0,05t})=0,05\times 19\,e^{-0,05t}=1,95\times e^{-0,05\,t}=L'(t)$
donc L est une solution de l'équation différentielle (E).
$L(0)=20-19\,e^0=20-19=1$.

2.a. $L'(0)=1,95\,e^0=1,95$ $\qquad L'(5)=1,95\,e^{-0,25}\simeq 1,52$
$L'(5)<L'(0)$

2.b. $L'(t)=1,95\,e^{-0,05\,t}$
$\lim\limits_{t\to+\infty}(-0,05\,t)=-\infty$ et $\lim\limits_{T\to-\infty} e^T=0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,05t}=0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} L'(t)=0$.
La vitesse de croissance du bambou à l'instant t tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.
Lorsque t devient « grand », la vitesse de croissance devient voisine de 0 et le bambou à presque terminée sa croissance.