Exercice B *au choix du candidat* *5 points*

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A et B.
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.
Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

EXERCICE B

Principaux domaines abordés:
Suites - Etude de fonction-Fonction logarithme

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par $f(x)=x-\ln(x-1)$.
On considère la suite (u_n) de terme initial $u_0=10$ et telle que $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

Partie 1 :

La feuille de calcul ci-dessous a permis d'obtenir des valeurs approchées des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	10
3	1	7.80277542
4	2	5.88544474
5	3	4.29918442
6	4	3.10550913
7	5	2.36095182
8	6	2.0527675
9	7	2.00134509
10	8	2.0000009

1. Quelle formule a été saisie dans la cellule B3 pour permettre le calcul des valeurs approchées de (u_n) par recopie vers le bas ?

2. À l'aide de ces valeurs, conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

Partie 2 :

On rappelle que la fonction f est définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par $f(x)=x-\ln(x-1)$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. On admettra que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2.a. Soit f' la fonction dérivée de f. Montrer que pour tout $x\in]1;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$.

2.b. En déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $]1;+\infty[$, complété par les limites.

2.c. Justifier que pour tout $x\geqslant 2$, $f(x)\geqslant 2$.

Partie 3 :

1. En utilisant les résultats de la partie 2, démontrer par récurrence que $u_n \geqslant 2$ pour tout entier naturel n.

2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note L sa limite.

4. On admet que L vérifie $f(L)=L$. Donner la valeur de L.

CORRECTION

Partie 1 :

1. $=E2-\ln(E2-1)$

2. Conjectures :
La suite (u_n) est décroissante.
La suite (u_n) converge vers 2.

Partie 2 :

1. $f(x)=x-\ln(x-1)$ $\quad x\in]1;+\infty[$
$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$ et $x-1>0$ et $\lim\limits_{X\to 0}\ln(X)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 1}\ln(x-1)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=+\infty$.
On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

2.a. $(\ln(u))'=\frac{u'}{u}$ $\quad u(x)=x-1$ $\quad u'(x)=1$ $\quad (\ln(x-1))'=\frac{1}{x-1}$

$f'(x)=1-\frac{1}{x-1}=\frac{x-1-1}{x-1}=\frac{x-2}{x-1}$

2.b. Si $x\in]1;+\infty[$ $\quad x-1>0$ donc le signe $f'(x)$ est le signe de (x-2).
$f'(2)=2$
Si $1<x<2$ alors $f'(x)<0$
Si $2<x$ alors $f'(x)>0$
Tableau de variation

x	1		2		$+\infty$
f '(x)	||	–	0	+	
f(x)	|| $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

$f(2)=2-\ln(2-1)=2-\ln(1)=2$

2.c. f(2)=2 est le minimum de la fonction f sur l'intervalle $1;+\infty[$.
Donc si $x\geqslant 2$ alors $f(x)\geqslant 2$.

Partie 3

1. On veut démontrer en utilisant par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n\geqslant 2$.
. <u>Initialisation</u>
$u_0=10\geqslant 2$ donc la propriéré est vérifiée pour n=0.
. <u>Hérédité</u>
Pour démontrer que la propriété est héréditaire, pour tout entier naturel n, on suppose que $u_n\geqslant 2$ et on doit démontrer que $u_{n+1}\geqslant 2$.
Si $u_n\geqslant 2$ alors $f(u_n)\geqslant f(2)$ car f est croissante sur $[2;+\infty[$.
Or et $f(2)=2$ on obtient donc $u_{n+1}\geqslant 2$.
. <u>Conclusion</u>
Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a $u_n\geqslant 2$.

2. Pour tout entier naturel n :

$u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n=u_n-\ln(u_n-1)-u_n=-\ln(u_n-1)$.

Or $u_n\geqslant 2$ donc $u_n-1\geqslant 2-1=1$ et $\ln(u_n-1)\geqslant\ln(1)=0$ conséquence : $-\ln(u_n-1)\leqslant 0$.

$u_{n+1}-u_n\leqslant 0$ et la suite (u_n) est décroissante.

3. (u_n) est une suite décroissante et minorée par 2 donc (u_n) est convergente.

On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=L$.

4. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=L$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)=f(L)$ donc $f(L)=L$.

$f(L)=L \iff L-\ln(L-1)=L \iff \ln(L-1)=0 \iff L-1=e^0=1 \iff L=2$