Exercice 3 — commun à tous les candidats — 5 points

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable.
Elle propose alors à ses 5000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.
En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.
Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constate que 85 % de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.
On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n).
Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le $n^{\text{ième}}$ mois après le mois de mai 2020. Ainsi $a_0=200$.

Partie A

1. Calculer a_1 .

2. justifier que pour tout entier naturel n, $a_{n+1}=0{,}85\,a_n+450$.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n=a_n-3000$.

3.a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,85.

3.b. Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

3.c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n=-2800\times 0{,}85^n+3000$.

4. Déterminer le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2500, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise.

Partie B

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\dfrac{5u_n+4}{u_n+2}$ où u_n désigne le nombre de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2020.

1. Démontrer que lafonction f définie pour tout $x\in[0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

2.a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 4$.

2.b. Justifier que la suite (u_n) est convergente.

3. On admet que pour tout entier naturel n, $0\leqslant 4-u_n\leqslant 3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

En déduire la limite de la suite (u_n) et l'interpréter dans le contexte de la modélisation.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

1. Au mois de juin 2020 85 % des collaborateurs ayant choisi le télétravail au mois de mai, choisissent de continuer : $200\times\frac{85}{100}=170$.

Au mois de juin 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail donc au mois de juin 2020 il y a $170+450=620$ collaborateurs au télétravail.

$a_1=620$.

2. Pour tout entier naturel n, au $(n+1)^{ième}$ mois après le mois de mai, 85 % des collaborateurs ayant choisi le télétravail au $n^{ième}$ mois choisissent de continuer : $a_n\times 0{,}85$.

Au $(n+1)^{ième}$ mois 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.

Donc au $(n+1)^{ième}$ mois il y a $0{,}85\,a_n+450$ collaborateurs au télétravail.

$a_{n+1}=0{,}85\,a_n+450$

(remarque : on admet que pour tout entier naturel n, $a_n\leqslant 5000$)

3.a. Pour tout entier naturel n, $v_n=a_n-3000 \Leftrightarrow a_n=v_n+3000$

$v_{n+1}=a_{n+1}-3000=0{,}85\,a_n+450-3000=0{,}85\times(v_n+3000)-2550 = 0{,}85\,v_n+2550-2550$

$v_{n+1}=0{,}85\,v_n$.

(v_n) est la suite géométrique de raison 0,85 et de premier terme $v_0=a_0-3000=200-3000=-2800$.

3.b. Pour tout entier naturel n, $v_n=v_0\times q^n=-2800\times 0{,}85^n$.

3.c. Pour tout entier naturel n, $a_n=v_n+3000=-2800\times 0{,}85^n+3000$.

(remarque : on a $a_n\leqslant 3000\leqslant 5000$)

4. On veut déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n>2500$.

$a_n<2500 \Leftrightarrow -2800\times 0{,}85^n+3000>2500 \Leftrightarrow 3000-2500>2800\times 0{,}85^n$

$\Leftrightarrow \frac{500}{2800}>0{,}85^n \Leftrightarrow \frac{5}{28}>0{,}85^n$

La fonction logarithme népérien ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{5}{28}\right)>\ln(0{,}85^n) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{5}{25}\right)>n\times\ln(0{,}85)$

$0<0{,}85<1$ donc $\ln(0{,}85)<0$

$\Leftrightarrow \frac{\ln\left(\frac{5}{28}\right)}{\ln(0{,}85)}<n$

On obtient avec la calculatrice :

$\frac{\ln\left(\frac{5}{28}\right)}{\ln(0{,}85)}=10{,}60$ à 10^{-2} près

n est un entier naturel donc $n\leqslant 11$.

Il faudra 11 mois pour que le nombre de télétravailleurs soit strictement supérieur à 2500.

Partie B

1. $x\in[0;+\infty[\quad f(x)=\frac{5x+4}{x+2} \quad u(x)=5x+4 \quad u'(x)=5 \quad v(x)=x+2 \quad v'(x)=1$

$f'(x)=\frac{5\times(x+2)-(5x+4)\times 1}{(x+2)^2}=\frac{5x+10-5x-4}{(x+2)^2}=\frac{6}{(x+2)^2}>0$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

2.a. On veut démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a : $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 4$.

Introduction

$u_0=1$ $\quad u_1=\frac{5\times 1+4}{1+2}=\frac{9}{3}=3$ $\quad$ donc $0\leqslant u_0\leqslant u_1\leqslant 4$

La propriété est vérifiée pour n=0.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que tout entier naturel n, on suppose $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 4$ et doit démontrer que $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 4$.

Si $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 4$ alors $f(0)\leqslant f(u_n)\leqslant f(u_{n+1})\leqslant f(4)$.

$f(0)=\frac{5\times 0+4}{0+2}=2$ $\quad f(u_n)=u_{n+1}$ $\quad f(u_{n+1})=u_{n+2}$ $\quad f(4)=\frac{4\times 5+4}{4+2}=\frac{24}{6}=4$

donc $2\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 4$ et on obtient donc $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 4$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 4$.

2.b. On a pour tout entier naturel naturel $u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 4$, donc la suite (u_n) est croissante et majorée par 4

(u_n) est une suite convergente.

3. On admet que pour tout entier naturel n, $0\leqslant 4-u_n\leqslant 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$0<\frac{1}{2}<1$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ et $\lim_{n\to+\infty} 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$.

Le théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que : $\lim_{n\to+\infty} 4-u_n=0$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n=4$.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés