Exercice A *au choix du candidat* *5 points*

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A et B.
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.
Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

EXERCICE A

Principaux domaines abordés: **Géomètrie dans l'espace - analytique**

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points suivants :
$A(2;-1;0)$ $B(3;-1;2)$ $C(0;4;1)$ $S(0;1;4)$

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

2.a. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC).

2.b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

2.c. Montrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

3. Soit (d) la droite orthogonale au plan (ABC) passant par S. Elle coupe le plan (ABC) en H.

3.a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d).

3.b. Montrer que les coordonnées du point H sont $H(2;2;3)$.

4. On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est : $V=\dfrac{\text{Aire de la base}\times\text{hauteur}}{3}$.

Calculer le volume du tétraèdre SABC.

5.a. Calculer la longueur SA.

5.b. On indique que $SB=\sqrt{17}$.
En déduire une mesure de l'angle $\widehat{ASB}$ approchée au dixième de degré.

CORRECTION

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=1\times(-2)+0\times5+2\times1=-2+2=0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux donc le triangle ABC est rectangle en A.

2.a. $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=2\times1+1\times0-1\times2=2-2=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=2\times(-2)+1\times5-1\times1=-4+5-1=0$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) donc le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal (ou normal) au plan (ABC).

2.b. $M(x;y;z)$ $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y+1\\z\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

M appartient au plan (ABC) $\Leftrightarrow$ $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$ $\Leftrightarrow$ $2\times(x-2)+1\times(y+1)-1\times z=0$

$\Leftrightarrow$ $2x-4+y+1-z=0$ $\Leftrightarrow$ $2x+y-z-3=0$

2.c. $S(0;1;4)$ $2\times2+1-4-3=-6\neq0$

Le point S n'appartient pas au plan (ABC) donc les points A ; B ; C et S ne sont pas coplanaires.

3.a. (d) est la droite passant par $S(0;1;4)$ et de vecteur directeur $\vec{n}$.

(d) $\begin{cases}x=2t+0\\y=t+1\\z=-t+4\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

3.b. On résout le système :

$\begin{cases}2x+y-z-3=0\\x=2t\\y=t+1\\z=-t+4\end{cases}$

$2\times(2t)+t+1-(-t+4)-3=0$ $\Leftrightarrow$ $4t+t+1+t-4-3=0$ $\Leftrightarrow$ $6t=6$ $\Leftrightarrow$ $t=1$

$x=2\times1=2$ $y=1+1=2$ $z=-1+4=3$ $H(2;2;3)$

4. Aire de la base : $\frac{1}{2}AB\times AC$ (le triangle ABC est rectangle en A).

$AB^2=1^2+0^2+2^2=5$ $AB=\sqrt{5}$

$AC^2=(-2)^2+5^2+1^2=30$ $AC=\sqrt{30}$

$\frac{1}{2}AB\times AC=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{30}=\frac{5\sqrt{6}}{2}$ (en unité d'aire)

Hauteur : $SH^2=(2-0)^2+(2-1)^2(3-4)^2=4+1+1=6$

$SH=\sqrt{6}$

Volume : $V=\frac{1}{3}\times\left(\frac{5\sqrt{6}}{2}\right)\times(\sqrt{6})=5$ (en unité de volume)

5.a. $SA^2=(2-0)^2+(-1-1)^2+(0-4)^2=4+4+16=24$

$SA=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

5.b. $SB=\sqrt{17}$

$\overrightarrow{SA}\begin{pmatrix}2\\-2\\-4\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\overrightarrow{SB}\begin{pmatrix}3\\-2\\-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}=2\times3\pm2\times(-2)-4\times(-2)=6+4+8=18$

$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}=SA\times SB\times\cos(\widehat{ASB})=2\sqrt{6}\times\sqrt{17}\times\cos(\widehat{ASB})$

$\cos(\widehat{ASB})=\dfrac{18}{2\sqrt{6}\times\sqrt{17}}=\dfrac{9}{\sqrt{6}\times\sqrt{17}}$.

En utilisant la calculatrice, on obtient : $\widehat{ASB}=27^{\circ}$ au dixième près.