Exercice B au choix du candidat 5 points

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A et B.
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.
Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

EXERCICE B

Principaux domaines abordés: **Fonction exponentielle- Equations différentielles**

<u>Partie A :</u>

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=2e^{-\frac{1}{3}x}+\frac{2}{3}x-2$.

1. On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa fonction dérivée.
Montrer que, pour tout réel x : $g'(x)=-\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{3}x}+\frac{2}{3}$.

2. En déduire le sens de variation de de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

3. Déterminer le signe de g(x), pour tout x réel.

<u>Partie B :</u>

1. On considère l'équation différentielle (E) : $3y'+y=0$.
Résoudre l'équation différentielle (E).

2. Déterminer la solution particulière dont la courbe représentative, dans un repère du plan, passe par le point $M(0;2)$.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2e^{-\frac{1}{3}x}$ et C_f sa courbe représentative.

3.a. Montrer quue la tangente (Δ_0) à la courbe C_f au point $M(0;2)$ admet une équation de la forme :
$y=-\frac{2}{3}x+2$.

3.b. Étudier, sur $\mathbb{R}$, la position de cette courbe C_f par rapport à la tangente (Δ_0) .

<u>Partie C :</u>

1. Soit A le point de la courbe C_f d'abscisse a, a réel quelconque.
Montrer que la tangente (Δ_a) à la courbe C_f au point A coupe l'axe des abscisses en un point P d'abscisse $a+3$.

2. Expliquer la construction de la tangente (Δ_{-2}) à la courbe C_f au point B d'abscisse -2.

CORRECTION

Partie A :

1. Pour tout nombre réel x, $g(x)=2e^{-\frac{1}{3}x}+\frac{2}{3}x-2$.

$(e^u)'=u'\times e^u \qquad u(x)=-\frac{1}{3}x \qquad u'(x)=-\frac{1}{3} \qquad \left(e^{-\frac{1}{3}x}\right)'=-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x}$

$g'(x)=2\times\left(-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x}\right)+\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{3}x}+\frac{2}{3}$.

2. $g'(x)=\frac{2}{3}\left(-e^{-\frac{1}{3}x}+1\right)$

$g'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad -e^{-\frac{1}{3}x}+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{-\frac{1}{3}x}=1=e^0 \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{1}{3}x=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=0$

$g'(x)>0 \quad\Leftrightarrow\quad -e^{-\frac{1}{3}x}+1>0 \quad\Leftrightarrow\quad 1>e^{-\frac{1}{3}x} \quad\Leftrightarrow\quad e^0>e^{-\frac{1}{3}x} \quad\Leftrightarrow\quad 0>-\frac{1}{3}x \quad\Leftrightarrow\quad 0<x$

$g'(x)<0 \quad\Leftrightarrow\quad x<0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'(x)		–	0	+	
g(x)		↘	0	↗	

$g(0)=2e^0-2=0$

3. Pour tout nombre réel x : $g(x)\geqslant g(0)=0$

On donne le signe de g(x) sous la forme d'un tableau.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g(x)		+	0	+	

Partie B :

1. (E) : $3y'+y=0 \quad\Leftrightarrow\quad y'=-\frac{1}{3}y$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'=ay$ $(a\neq 0)$ sont les fonctions f_k (k nombre réel) définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x)=ke^{ax}$.

Pour (E) : $f_k(x)=ke^{-\frac{1}{3}x} \qquad k\in\mathbb{R}$

2. La solution particulière dont la courbe représentative passe par le point M(0;2) vérifie $f_k(0)=2$.

$ke^0=2 \quad\Leftrightarrow\quad k=2$

La solution particulière est donc la fonction f_2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_2(x)=2e^{-\frac{1}{3}x}$.

3. Remarque : $f(x)=f_2(x)$.

$f(0)=2 \qquad f'(x)=-\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{3}x} \qquad f'(x)=-\frac{2}{3}$.

Donc (Δ_0) la tangente à la courbe C_f au point M(0;2) a pour équation : $y=-\frac{2}{3}x+q$.

Pour x=0 on a y=2 donc q=2

(Δ_0): $y=-\frac{2}{3}x+2$.

3.b. Pour tout nombre réel x : $f''(x)=\frac{2}{9}e^{-\frac{1}{3}x}>0$

f est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ et C_f est au dessus de toutes ses tangentes.

C_f est au dessus de (Δ_0) .

Partie C :

1. $A(a;f(a))$ $\quad f(a)=2e^{-\frac{1}{3}a}$

$f'(x)=-\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{3}x}$ $\quad f'(a)=-\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{3}a}$

(Δ_a): $y=-\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{3}a}x+q$

Pour $x=a$ $\quad y=f(a)=2e^{-\frac{1}{3}a}$

$2e^{-\frac{1}{3}a}=-\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{3}a}a+q$

$q=2e^{-\frac{1}{3}a}+\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{3}a}a=2e^{-\frac{1}{3}a}\left(1+\frac{a}{3}\right)=\frac{2}{3}(a+3)e^{-\frac{1}{3}a}$.

$y=-\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{3}}x+\frac{2}{3}(a+3)e^{-\frac{1}{3}a}$

L'abscisse du point P d'intersection de (Δ_a) et l'axe des abscisses est :

$-\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{3}a}(x-(a+3))=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=a+3$

$A(a+3;0)$

2. $B(-2;f(-2))$

Le point A(-2+3;0) soit A(1;0) appartient à (Δ_{-2}) .

$(\Delta_{-2})=(AB)$