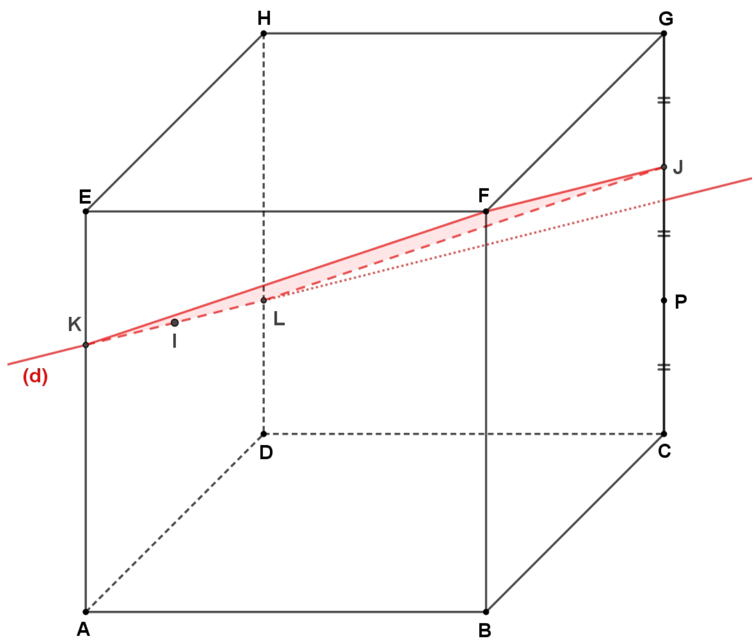
Exercice 3 commun à tous les candidats 5 points

ABCDEFGH est un cube. I est le centre de la face ADHE et J est un point du segment [CG].
Il existe donc $\alpha \in [0;1]$ tel que $\overrightarrow{CJ}=\alpha\overrightarrow{CG}$.
On note (d) la droite passant par I et parallèle à (FJ).
On note K et L les points d'intersection de la droite (d) et des droites (AE) et (DH).
On se place dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.

<u>Partie A :</u> Dans cette partie $\alpha=\frac{2}{3}$



1. Donner les coordonnées des points F, I et J.

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d).

3.a. Montrer que le point de coordonnées $\left(0;0;\frac{2}{3}\right)$ est le point K.

3.b. Déterminer les coordonnées du point L, intersection de (d) et (DH).

4.a. Démontrer que le quadrilatère FJLK est un parallélogramme.

4.b. Démontrer que le quadrilatère FJKL est un losange.

4.c. Le quadrilatère FJKL est-il un carré ?

<u>Partie B :</u> Cas général

On admet que les coordonnées des points K et L sont : $K\left(0;0;1-\frac{\alpha}{2}\right)$ et $L\left(0;1;\frac{\alpha}{2}\right)$.

On rappelle que $\alpha \in [0;1]$

1. Déterminer les coordonnées de J en fonction de α.

2. Montrer que le quadrilatère FJLK est un parallélogramme.

3. Existe-t-il des valeurs de α telles que le quadrilatère FJLK soit un losange ? Justifier.

4. Existe-t-il des valeurs de α telles que le quadrilatère FJIK soit un carré ? Justifier.

CORRECTION

1. $F(1;0;0)$

$H(0;1;1)$ $A(0;0;0)$ I est le milieu de [AH] $I\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

$C(1;1;0)$ $G(1;1;1)$ $J(x;y;z)$ $\overrightarrow{CG}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CJ}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CG} \Leftrightarrow \begin{cases}x-1=0\\y-1=0\\z=\frac{2}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=1\\z=\frac{2}{3}\end{cases}$ $J\left(1;1;\frac{2}{3}\right)$

2. $\overrightarrow{FJ}\begin{pmatrix}0\\1\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ $I\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

(d) est la droite passant par I et de vecteur directeur $\overrightarrow{FJ}$.

$M(x;y;z)\in(d) \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\times t+0\\y=1\times t+\frac{1}{2}\\z=-\frac{1}{3}\times t+\frac{1}{2}\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

3.a. N est lle point de coordonnées $\left(0;0;\frac{2}{3}\right)$

$\begin{cases}0=0\\0=t+\frac{1}{2}\\\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}t+\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=-\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}t=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=-\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}t=-\frac{1}{6}\end{cases} \Leftrightarrow \left\{t=-\frac{1}{2}\right.$

Le point N appartient à la droite (d).

$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ donc le point N appartient à la droite (AE).

Le point N est le point d'intersection des droites (d) et (AE) donc $N=K$ et $K\left(0;0;\frac{2}{3}\right)$.

3.b. $D(0;1;0)$ $H(0;1;1)$ $\overrightarrow{DH}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

(DH) : $\begin{cases}x=0\times k+0\\y=0\times k+1\\z=1\times k+0\end{cases}$ $k\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=1\\z=k\end{cases}$ $k\in\mathbb{R}$

On détermine les coordonnées du point d'intersection des droites (d) et (DH).

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t+\frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{3}t+\frac{1}{2} \\ x = 0 \\ y = 1 \\ z = k \end{cases} \quad \text{on obtient} \quad \begin{cases} t+\frac{1}{2} = 1 \\ -\frac{1}{3}t+\frac{1}{2} = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ k = \frac{1}{2}-\frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ k = \frac{1}{3} \end{cases} \qquad L\left(0;1;\frac{1}{3}\right)$$

4.a. $K\left(0;0;\frac{2}{3}\right)$ $\quad L\left(0;1;\frac{1}{3}\right)$ $\quad \overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}0\\1\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ or $\overrightarrow{FJ}\begin{pmatrix}0\\1\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{FI}$ est le quadrilatère FJKL est un parallélogramme.

4.b. $F(1;0;1)$ $\quad K\left(0;0;\frac{2}{3}\right)$ $\quad \overrightarrow{FK}\begin{pmatrix}1\\0\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$FK^2=1^2+0^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2=1+\frac{1}{9}=\frac{10}{9}$ $\qquad FK=\frac{\sqrt{10}}{3}$

$FJ^2=0^2+1^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2=1+\frac{1}{9}=\frac{10}{9}$ $\qquad FJ=\frac{\sqrt{10}}{3}$

FK=FJ donc le quadrilatère FJLK est un losange.

4.c. $\overrightarrow{FJ}.\overrightarrow{FK}=0\times1+1\times0+\left(-\frac{1}{3}\right)\times\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}\neq0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{FJ}$ et $\overrightarrow{FK}$ ne sont pas orthogonaux donc $\widehat{JFK}\neq90^\circ$.
Le quadrilatère FJKL n'est pas un carré.

<u>Partie B :</u> cas général

$K\left(0;0;1-\frac{\alpha}{2}\right)$ $\quad L\left(0;1;\frac{\alpha}{2}\right)$ $\qquad \alpha\in[0;1]$

1. $C(1;1;0)$ $\quad G(1;1;1)$ $\quad J(x;y;z)$ $\quad \overrightarrow{CG}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{CJ}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z\end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{CJ}=\alpha\overrightarrow{CG} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 0 \\ y-1 = 0 \\ z=\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z=\alpha \end{cases} \qquad J(1;1;\alpha)$$

2. $\overrightarrow{FJ}\begin{pmatrix}0\\1\\\alpha-1\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}0\\1\\-1+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}0\\1\\\alpha-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{FJ}=\overrightarrow{KJ}$ donc la quadrilatère FJLK est un parallélogramme.

3. $\overrightarrow{FJ}\begin{pmatrix}0\\1\\\alpha-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{FK}\begin{pmatrix}-1\\0\\1-\frac{\alpha}{2}-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{FK}\begin{pmatrix}-1\\0\\-\frac{\alpha}{2}\end{pmatrix}$ $\alpha\in[0;1]$

$FJ^2=0^2+1^2+(\alpha-1)^2=1+\alpha^2-2\alpha+1=\alpha^2-2\alpha+2$

$FK^2=1^2+0^2+\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2=1+\frac{\alpha^2}{4}$

Le quadrilatère FJLK est un losange si et seulement si $FJ^2=FK^2$

$\Leftrightarrow$ ($\alpha^2-2\alpha+2=1+\frac{\alpha^2}{4}$ et $\alpha\in[0;1]$)

$\alpha^2-2\alpha+2=1+\frac{\alpha^2}{4} \Leftrightarrow 4\alpha^2-8\alpha+8=4+\alpha^2 \Leftrightarrow 3\alpha^2-8\alpha+4=0$

$\Delta=(-8)^2-4\times4\times3=64-48=16=4^2$

$\alpha_1=\frac{8-4}{2\times3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ $\alpha_2=\frac{8+4}{2\times3}=\frac{12}{6}=2$

$\frac{2}{3}\in[0;1]$ $2\notin[0;1]$

Le quadrilatère FJLK est un losange si et seulement si $\alpha=\frac{2}{3}$.

4. Nous avons démontrer dans la **partie A** que pour la valeur $\alpha=\frac{2}{3}$ le quadrilatère FJLK n'est pas un carré.

Donc, il n'existe pas de valeur de α pour laquelle le quadrilatère FJLK est un carré.

Remarque :

Le quadrilatère FJLK peut-être un rectangle.

$\overrightarrow{FJ}.\overrightarrow{FK}=0\times1+1\times0+(\alpha-1)\times\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\alpha}{2}\times(\alpha-1)$

$\overrightarrow{FJ}.\overrightarrow{FK}=0 \Leftrightarrow (\alpha=0 \text{ ou } \alpha=1)$

Pour $\alpha=0$ on obtient le rectangle FCDE.

Pour $\alpha=1$ on obtient le rectangle FGLK avec L milieu de [DH] et K milieu de [AE].