Exercice A au choix du candidat 5 points

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A et B.
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.
Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

EXERCICE A

Principaux domaines abordés: **Variables aléatoires - Fonction ln**

Partie A :

Dans un pays, une maladie touche la population avec une probabilité de 0,05. On possède un test de dépistage de cette maladie.
On considère un échantillon de n personnes $(n \geqslant 20)$ prises au hasard dans la population assimilé à un tirage avec remise.
On teste l'échantillon suivant cette méthode : on mélange le sang de ces n individus, on teste le mélange. Si le test est positif, on effectue une analyse individuelle de chaque personne.
Soit X_n la variable aléatoire qui donne le nombre d'analyses effectuées.

1. Montrer que X_n prend les valeurs 1 et $(n+1)$.
2. Prouver que $P(X_n=1)=0{,}95^n$.
Établir la loi de probabilité de X_n, en recopiant sur la copie et en complétant le tableau suivant :

x_i	1	n+1
$P(X_n=x_i)$		

3. Que représente l'espérance de X_n dans le cadre de l'expérience ?
Montrer que $E(X_n)=n+1-n\times 0{,}95^n$.

Partie B :

1. On considère la fonction f définie sur $[20;+\infty[$ par $f(x)=\ln(x)+x\ln(0{,}95)$.
Montrer que f est strictement décroissante sur $[20;+\infty[$.
2. On rappelle $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.
3. Montrer que $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $[20;+\infty[$.
Donner un encadrement à $0{,}1$ près de cette solution.
4. En déduire le signe de f sur $[0;+\infty[$.

Partie C :

On cherche à comparer deux types de dépistages. La première méthode est décrite dans la partie A, la seconde plus classique, consiste à tester tous les individus.
La première méthode permet de diminuer le nombre d'analyses dès que $E(X_n)<n$.

En utilisant la partie B, montrer que la première méthode diminue le nombre d'analyses pour des échantillons comportant 87 personnes maximum.

CORRECTION

Partie A :

1. Si le test du mélange du sang des n individus est négatif alors on a réalisé une seule analyse et les n individus sont négatifs au test.
Si le test du mélange du sang des n individus est positif alors on réalise n nouvelles analyses individuelles et on obtient le résultat pour chaque individu. On a réalisé (n+1) analyses.
Donc X_n prend pour valeurs : 1 et $n+1$.

2. La probabilité qu'une personne choisisse au hasard dans la population soit malade est : $0{,}05$ donc la probabilité que cette personne ne soit pas malade est : $1-0{,}05=0{,}95$.
Les tirages sont assimilés à des tirages indépendants avec remise.
L'événement $(X_n=1)$ est l'événement : « les n individus de l'échantillon ne sont pas malades » donc $P(X_n=1)=0{,}95^n$.
$(X_n=n+1)$ est l'événement contraire de l'événement précédent : $P(X_n=n+1)=1-P(X_n=1)=1-0{,}95^n$.
On donne la loi de probabilité de la variable aléatoire X_n sous la forme d'un tableau.

3. $E(X_n)=1\times 0{,}95^n+(n+1)\times(1-0{,}95^n)=0{,}95^n+n+1-n\times 0{,}95^n-0{,}95^n$
$E(X_n)=n+1-n\times 0{,}95^n$

Partie B :

1. $x\in[20;+\infty[\qquad f(x)=\ln(x)+x\ln(0{,}95)$
$$f'(x)=\frac{1}{x}+\ln(0{,}95)=\frac{1+x\ln(0{,}95)}{x}$$
$x>0$ donc le signe $f'(x)$ sur $[20;+\infty[$ est le signe de $1+x\ln(0{,}95)$.
$$1+x\ln(0{,}95)<0 \quad\Leftrightarrow\quad x\ln(0{,}95)=-1 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{-1}{\ln(0{,}95)}\simeq 19{,}5$$
$$1+x\ln(0{,}95)<0 \quad\Leftrightarrow\quad x\ln(0{,}95)<-1$$
$0<0{,}95<1$ donc $\ln(0{,}9+5)<0$
$$\Leftrightarrow\quad x>\frac{-1}{\ln(0{,}95)}\simeq 19{,}5$$
Conséquence
Si $x>20$ alors $f'(x)<0$ et f est strictement décroissante sur $[20;+\infty[$.

2. $$f(x)=\ln(x)+x\ln(0{,}95)=x\left(\frac{\ln(x)}{x}+\ln(0{,}95)\right).$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0 \text{ donc } \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x}+\ln(0{,}95)\right)=\ln(0{,}95)<0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty .$$

3. f est dérivable et strictement décroissante sur $[20;+\infty[$ à valeurs dans l'intervalle $]-\infty;f(20)]$.
$f(20)=1{,}97$ à 10^{-2} près donc $0\in]-\infty;f(20)]$.
Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que 0 admet un unique antécédent α appartenant à $[20;+\infty[$
Donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $[20;+\infty[$.
En utilisant la calculatrice.
$f(100)\simeq -0{,}52<0 \qquad f(90)\simeq -0{,}12<0 \qquad f(80)\simeq 0{,}28 \qquad 80<\alpha<90$
$f(87)\simeq 0{,}003>0 \qquad f(87{,}1)\simeq -0{,}006<0 \qquad 87<\alpha<87{,}1$

4. f est strictement décroissante sur $[20;+\infty[$.
Si $20 \leqslant x < \alpha$ alors $f(20) \geqslant f(x) > f(\alpha) = 0$.
Si $\alpha < x$ alors $f(\alpha) = 0 > f(x)$
On donne le signe de f sous la forme d'un tableau.

x	20		α		+∞
f(x)		+	0	–	

Partie C :

$E(X_n) < n \Leftrightarrow n+1-n\times 0{,}95^n < n \Leftrightarrow 1 < n\times 0{,}95^n$
La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$
$\Leftrightarrow \ln(1) < \ln(n\times 0{,}95^n) \Leftrightarrow 0 < \ln(n) + \ln(0{,}95^n) \Leftrightarrow 0 < \ln(n) + n\times\ln(0{,}95) \Leftrightarrow 0 < f(n)$
donc $n \in [20;\alpha[$
Le plus grand entier naturel n appartenant à $[20;\alpha[$ est 87.
La première méthode diminue le nombre d'analyses pour des échantillons comportant 87 personnes au maximum.