## Exercice B au choix du candidat 5 points

**Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A et B.**
**Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.**
**Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.**

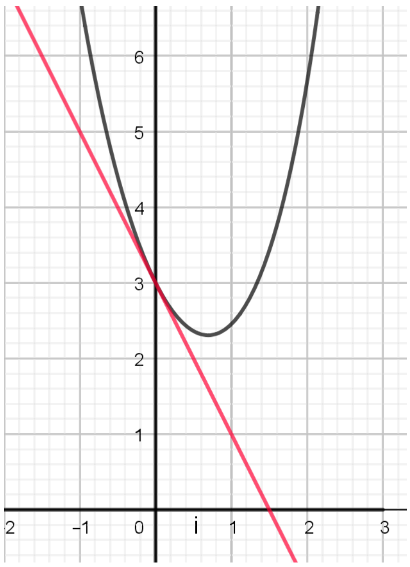
**EXERCICE B**

| |
|---|
| **Principaux domaines abordés:**<br>**Equation différentielle** |

**<u>Partie A :</u> Détermination d'une fonction f et résolution d'une équation différentielle**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^{x}+ax+be^{-x}$ où a et b sont des nombres réels que l'on propose de déterminer dans cette partie.

Dans le plan muni d'un repère d'origine O, on a représenté ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$, représentant la fonction f, et la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.




**1.** Par lecture graphique, donner les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.

**2.** En utilisant l'expression de la fonction f, exprimer $f(0)$ en fonction de b et en déduire la valeur de b.

**3.** On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note $f'$ sa fonction dérivée.
**3.a.** Donner, pour tout réel x, l'expression de $f'(x)$.
**3.b.** Exprimer $f'(0)$ en fonction de a.
**3.c.** En utilisant les questions précédentes, déterminer a, puis en déduire l'expression de f(x).

**4.** On considère l'équation différentielle :
$(E): \quad y'+y=2e^{x}-x-1$
**4.a.** Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=e^{x}-x+2e^{-x}$ est solution de l'équation (E).
**4.b.** Résoudre l'équation différentielle $y'+y=0$.
**4.c.** En déduire toutes les solutions de l'équation (E).

**Partie B :** **Étude de la fonction g sur $[1;+\infty[$**

**1.** Vérifier que pour tout réel x, on a : $e^{2x}-e^x-2=(e^x-2)(e^x+1)$ .

**2.** En déduire une expression factorisée de $g'(x)$ pour tout réel x.

**3.** On admettra que, pour tout $x\in[1;+\infty[$ $e^x-2>0$ .
Étudier le sens de variation de la fonction g sur $[1;+\infty[$ .

CORRECTION

**Partie A :**

**1.** Par lecture graphique.
Le point d'abscisse O de $\mathscr{C}$ a pour ordonnée 3 donc $f(0)=3$.
La tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 passe par les points de coordonnées (0;3) et (1;1).
Le coefficient directeur de (T) est égal à : $f'(0)=\frac{3-1}{0-1}=-2$.

**2.** $f(x)=e^x+ax+be^{-x}$
$f(0)=e^0+0+be^x=1+b$
$f(0)=3=1+b \quad \Leftrightarrow \quad b=0$
$f(x)=e^x+ax+2e^{-x}$

**3.a.** $(e^x)'=e^x \qquad (e^u)'=u'\times e^u$ donc $(e^{-x})'=-e^{-x}$
$f'(x)=e^x+a-2e^{-x}$

**3.b.** $f'(0)=e^0+a-2e^{-0}=1-a-2=a-1$

**3.c.** $f'(0)=a-1=-2 \quad \Leftrightarrow \quad a=-1$
$f(x)=e^x-x+2e^{-x}$

**4.** (E) $y'+y=2e^x-x-1$
**4.a.** Pour tout nombre réel x
$g(x)=e^x-x+2e^{-x}$
$g'(x)e^x-1-2e^{-x}$
$g'(x)+g(x)=e^x-1-2e^{-x}+e^x-x+2e^{-x}$
$g'(x)+g(x)=2e^x-x-1$
g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

**4.b.** $y'+y=0 \quad \Leftrightarrow \quad y'=-y$
Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions $h_k$ définies sur $\mathbb{R}$ par $h_k(x)=k\,e^{-x}$
( k constante réelle).

**4.c.** Les solutions de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $l_k$ définies sur $\mathbb{R}$ par :
$l_k(x)=k\,e^{-x}+e^x-x+2e^{-x}=e^x-x+(k+2)e^{-x}$ (k constante réelle).

**Partie B :**

**1.** Pour tout nombre réel x,
$(e^x-2)(e^x+1)=e^x\times e^x-2e^x+e^x-2=e^{2x}-e^x-2$

**2.** $x\in[1;+\infty[ \qquad g(x)=e^x-x+2e^{-x}=l_0(x)$
$g'(x)=e^x-1-2e^{-x}=e^x-1-2\times\frac{1}{e^x}=\frac{e^{2x}-e^x-2}{e^x}=\frac{(e^x-2)(e^x+1)}{e^x}=(e^x-2)(e^x+1)e^{-x}$

**3.** Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1;+\infty[$, $e^x-2>0$, $e^x+1>0$ et $e^{-x}>0$ donc $g'(x)>0$
et g est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.