Exercice 1 commun à tous les candidats 5 points

Dans une école statistique , après étude des dossiers des candidats , le recrutement se fait de deux façons :
- 10 % des candidats sont sélectionnés sur dossier . Ces candidats doivent ensuite passer un oral à l'issue duquel 60 % d'entre eux sont finalement admis à l'école.
- Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20 % d'entre eux sont admis à l'école.

Partie 1

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement.
On notera :
- D l'événement « le candidat a été sélectionné sur dossier » ;
- A l'événement « le candidat a été admis à l'école ;
- $\bar{D}$ et $\bar{A}$ les événements contraires des événements D et A respectivement.

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis à L'école.

3. Montrer que la probabilité de l'événement A est égale à $0{,}24$.

4. On choisit au hasard un candidat admis à l'école.
Quelle est la probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné ?

Partie 2

1. On admet que la probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à $0{,}24$.
On considère un échantillon de sept candidats choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant les candidats admis à l'école parmi les sept tirés au sort.

1.a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale ; Quels sont les paramètres de cette loi ?

1.b. Calculer la probabilité qu'un seul des sept candidats tirés au sort s oit admis à l'école. On donnera une réponse arrondie au centième.

1.c. Calculer la probabilité qu'au moins deux des sept candidats tirés au sort soient admis à cette école. On donnera une réponse arrondie au centième.

2. Un lycée présente n candidats au recrutement dans cette école, où n est un entier naturel non nul.
On admet que la probabilité pour un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à 0,24 et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.

2.a. Donner l'expression, en fonction de n, de la probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école.

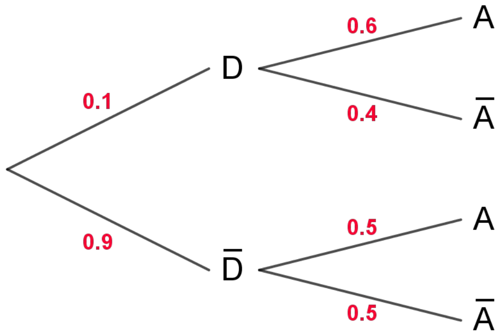
2.b. À partir de quelle valeur de l'entier n la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est-elle supérieure ou égale à 0,99 ?

CORRECTION

Partie 1

1. L'énoncé précise :

- 10 % des candidats sont sélectionnés sur dossier donc $P(10)=\frac{10}{100}=0{,}1$.
  $P(\bar{D})=1-P(D)=1-0,=0{,}9$.
- Parmi les candidats sélectionnés sur dossier 60 % d'entre eux sont finalement admis à l'école, donc :
  $P_D(A)=\frac{60}{100}=0{,}6$ et $P_D(\bar{A})=1-P_A(D)=1-0{,}6=0{,}4$.
- Après l'épreuve écrite 20 % des candidats sont admis à l'école donc $P_{\bar{D}}(A)=\frac{20}{100}=0{,}2$.
  $P_{\bar{D}}(\bar{A})=1-P_{\bar{D}}(A)=1-0{,}2=0{,}8$.
- Arbre pondéré



2. $P(D\cap A)=P(D)\times P_D(A)=0{,}1\times0{,}6=0{,}06$.

3. En utilisant la formule des probabilités totales.
$P(A)=P(D\cap A)+P(\bar{D}\cap A)$.
$P(\bar{D}\cap A)=P(\bar{D})\times P_{\bar{D}}(A)=0{,}9\times0{,}2=0{,}18$
$P(A)=0{,}06+0{,}18=0{,}24$.

4. On doit calculer $P_A(\bar{D})$
$P_A(\bar{D})=\frac{P(A\cap\bar{D})}{P(A)}=\frac{0{,}12}{0{,}18}=\frac{2}{3}$.

Partie 2

1.a. Le succès est l'événement A et P(A)=0,24=p.
On considère un échantillon de sept candidats donc n=7.
X suit la loi binomiale de paramètres : 0,24 et 7.

1.b. $P(X=1)=\binom{7}{1}\times0{,}24^1\times0{,}76^6=7\times0{,}21\times0{,}76^6=0{,}32$.

1.c. Soit K l'événement « au moins deux des sept candidats tirés au sort soient admis à l'école ».
$\bar{K}$ est l'événement « aucun candidat admis ou 1 candidat admis ».
$P(\bar{K})=P(X=0)+P(X=1)=0{,}76^7+0{,}32=0{,}15+0{,}32=0{,}47$.
$P(K)=1-P(\bar{K})=1-0{,}47=0{,}53$.

2.a. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'élèves (parmi les n élèves) admis à l'école.
Y soit la loi binomiale de paramètres $0{,}24$ et n.
$P(Y=0)=0{,}76^n$.

2.b. $P(Y\geqslant 1)\geqslant 0{,}99 \quad\Leftrightarrow\quad 1-P(Y=0)\geqslant 0.99 \quad\Leftrightarrow\quad 1-0{,}99\geqslant 0{,}76^n \quad\Leftrightarrow\quad 0{,}01\geqslant 0{,}76^n$
La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
$\Leftrightarrow\quad \ln(0{,}01)\geqslant \ln(0{,}76^n) \quad \ln(0{,}01)\geqslant n\times \ln(0{,}76)$
$0<0{,}76<1$ donc $\ln(0{,}76)<\ln(1)=0$
$\Leftrightarrow\quad \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}76)}\leqslant n$
$\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}76)}\simeq 16{,}78$ donc $n=17$
La probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est supérieure ou égale à $0{,}99$ lorsque $n\geqslant 17$.