Exercice 2 *commun à tous les candidats* *5 points*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{e^x}{x}$.

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1.a. Préciser la limite de la fonction f en $+\infty$.

1.b. Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe C_f.

2. Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a : $f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$

où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

3. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$. On établira un tableau de variations de la fonction f dans lequel apparaîtront les limites.

4. Soit m un nombre réel. Préciser, en fonction des valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$.

5. On note Δ la droite d'équation $y=-x$.
On note A un éventuel point de C_f d'abscisse α en lequel la tangente à la courbe C_f est parallèle à la droite Δ.

5.a. Montrer que α est solution de l'équation $e^x(x-1)+x^2=0$.

On note g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=e^x(x-1)+x^2$.
On admet que la fonction g est dérivable et on note g' sa fonction dérivée.

5.b. Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de g sur $[0;+\infty[$.

5.c. Montrer qu'il existe un unique point A en lequel la tangente à C_f est parallèle à la droite Δ.

CORRECTION

1.a. $x\in]0;+\infty[$ $\quad f(x)=\dfrac{e^x}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$.

1.b. $x\in]0;+\infty[$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} e^0=1>0$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ donc la droite d'équation $x=0$ est une asymptote verticale à la courbe C_f.

2. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$

$u(x)=e^x \quad u'(x)=e^x \quad v(x)=x \quad v'(x)=1$

$f'(x)=\dfrac{e^x\times x-e^x\times 1}{x^2}=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$.

3. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a : $e^x>0$ et $x^2>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $x-1$.

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \qquad x-1>0 \Leftrightarrow x>1 \qquad x-1<0 \Leftrightarrow x<1$

Tableau de variations de f

$f(1)=e$

x	0		1		$+\infty$
f '(x)	‖	$-$	0	$+$	
f(x)	‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

4. Le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$ est égal au nombre de points d'intersection de C_f et de la droite d'équation $y=m$.

- Si $m<e$ alors il n'y a aucun point d'intersection entre C_f et la droite d'équation $y=m$ donc l'équation $f(x)=m$ admet aucune solution.
- Si $m=e$ alors il y a un seul point commun à C_f et la droite d'équation $y=m$, le point de coordonnées (1;e) donc l'équation $f(x)=e$ admet une unique solution : 1.
- Si $m>e$ alors il y a deux points d'intersection entre C_f et la droite d'équation $y=m$, l'un $B_m(b_m;m)$ $b_m\in]0;1[$ l'autre $C_m(c_m;m)$ $c_m\in]1;+\infty[$ et l'équation $f(x)=m$ admet deux solutions b_m et c_m.

5.a. $\alpha\in]0;+\infty[$

$A(\alpha;f(\alpha))$ est un point de C_f, le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point A est égal à $f'(\alpha)$.

Cette tangente est parallèle à Δ si et seulement si $f'(\alpha)=-1 \Leftrightarrow \dfrac{e^\alpha(\alpha-1)}{\alpha^2}=-1 \Leftrightarrow$

$e^\alpha(\alpha-1)=-\alpha^2 \Leftrightarrow e^\alpha(\alpha-1)+\alpha^2=0$

donc α est une solution de l'équation $e^x(x-1)+x^2=0$.

5.b. $x\in[0;+\infty[$

$g(x)=e^x(x-1)+x^2$

$g'(x)=e^x\times 1+e^x(x-1)+2x$

$g'(x)=xe^x+2x\geqslant 0$

Si $x>0$ alors $g'(x)>0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

$g(0)=e^0(0-1)+0^2=1$

Tableau de variations de g

x	0		$+\infty$
g '(x)		+	
g(x)	-1	$\nearrow$	$+\infty$

5.c. g est continue sur $[0;+\infty[$. $g(0)=-1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ et $-1\in[0;+\infty[$

Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$.

Remarque : $g(1)=1$ donc $\alpha\in]0;1[$

<u>Conclusion</u>

Il existe un unique point A(d'abscisse α) en lequel la tangente à C_f est parallèle à la droite Δ .