Exercice A au choix du candidat 5 points

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A et B.
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.
Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

Exercice A

> **Principaux domaines abordés:**
> **Suites numériques; raisonnement par récurrence; suites géométriques**

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+\frac{1}{4}n+1$.

1. Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1.75
4	2	2.5625
5	3	3.421875
6	4	4.31640625

L'extrait reproduit ci-dessus, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n).

2.a. Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B ?

2.b. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

3.a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $n\leqslant u_n\leqslant n+1$.

3.b. En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation el la limite de la suite (u_n).

3.c. Démontrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}=1$.

4. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=u_n-n$.

4.a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

4.b. En déduire que, pour tout entier naturel nn, on a : $u_n=\left(\frac{3}{4}\right)^n+n$

CORRECTION

1. $u_1=\frac{3}{4}\times u_0+\frac{1}{4}\times 0+1=\frac{3}{4}\times 1+0+1=\frac{7}{4}$

$u_2=\frac{3}{4}\times u_1+\frac{1}{4}\times 1+1=\frac{3}{4}\times\frac{7}{4}+\frac{1}{4}+1=\frac{21+4+16}{16}=\frac{41}{16}$

2.a. $=\frac{3}{4}\times B2+\frac{1}{4}\times A2+1$.

2.b. On peut conjecturer que la suite est croissante.

3.a. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n, $n\leqslant u_n\leqslant n+1$.

Initialisation

$u_0=1$ donc $0\leqslant u_0\leqslant 1$ et la propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $n\leqslant u_n\leqslant n+1$ et on doit démontrer que $n+1\leqslant u_{n+1}\leqslant n+2$.

Si $n\leqslant u_n\leqslant n+1$ donc $\frac{3}{4}\times n\leqslant\frac{3}{4}\times u_n\leqslant\frac{3}{4}\times(n+1)$.

Et $\frac{3}{4}\times n+\frac{1}{4}\times n+1\leqslant\frac{3}{4}u_n+\frac{1}{4}\times n+1\leqslant\frac{3}{4}\times n+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times n+1$.

Soit $n+1\leqslant u_n\leqslant 1+\frac{3}{4}\leqslant n+2$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, $n\leqslant u_n\leqslant n+1$.

3.b. Pour tout entier naturel n, $n\leqslant u_n\leqslant n+1$ et $n+1\leqslant u_{n+1}\leqslant n+2$ donc $u_n\leqslant n+1\leqslant n_{n+1}$.

La suite (u_n) est croissante.

3.c. Pour tout entier naturel **non nul** , $n\leqslant u_n\leqslant n+1$ donc $\frac{n}{n}\leqslant\frac{u_n}{n}\leqslant\frac{n+1}{n}$ soit $1\leqslant\frac{u_n}{n}\leqslant\frac{n+1}{n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n}=1$.

Le théorème des gendarmes nous permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}=1$.

4.a. Pour tout entier naturel n :

$v_{n+1}=u_{n+1}-(n+1)=\frac{3}{4}u_n+\frac{1}{4}n+1-n-1=\frac{3}{4}u_n-\frac{3}{4}n=\frac{3}{4}(u_n-n)=\frac{3}{4}v_n$

(v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0=u_0-0=1$ et de raison $\frac{3}{4}$.

4.b. Pour tout entier naturel n, $v_n=v_0\times q^n=1\times\left(\frac{3}{4}\right)^n=\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

$v_n=u_n-n \Leftrightarrow u_n=v_n+n$

donc $u_n=\left(\frac{3}{4}\right)^n+n$.