Exercice B au choix du candidat 5 points

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A et B.
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.
Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

Exercice B

Principaux domaines abordés: **Fonction logarithme; convexité**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x+4-4\ln(x)-\frac{3}{x}$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. On admet que la fnction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

Démontrer que, pour tout nombre réel $x>0$, on a : $f'(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2}$.

3.a. Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$. On y fera figurer les valeurs exactes des extremums et les limites en 0 et en $+\infty$. On admettra que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$.

3.b. Par simple lecture du tableau de variations, préciser le nombre de solutions de l'équation $f(x)=\frac{5}{3}$.

4. Étudier la convexité de la fonction f, c'est à dire préciser les parties de l'intervalle $]0;+\infty[$ sur lesquelles f est convexe et celles sur lesquelles f est concave. On justifiera que la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion, dont on déterminera les coordonnées.

CORRECTION

1. $x\in]0;+\infty[$

$$f(x)=x+4-4\ \ln(x)-\frac{3}{x}=x\left[1+\frac{4}{x}-4\times\frac{\ln(x)}{x}-\frac{3}{x^2}\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}-\frac{3}{x^2}=0 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{x}-4\times\frac{\ln(x)}{x}-\frac{3}{x^2}\right)=1$$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2. $(\ln(x))'=\dfrac{1}{x}$ $\qquad \left(-\dfrac{3}{x}\right)'=\dfrac{3}{x^2}$

donc $f'(x)=1-4\times\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2}$

3.a. $x\in]0;+\infty[$ donc $x^2>0$ et le signe de $f'(x)$ est le signe de $N(x)=x^2-4x+3$.

$\Delta=(-4)^2-4\times1\times3=16-12=4=2^2$

$x_1=\dfrac{4-2}{2}=\dfrac{2}{2}=1 \qquad x_2=\dfrac{4+2}{2}=3$

Le coefficient de x^2 dans N(x) est strictement positif donc :

Si $0<x<1$ alors $N(x)>0$. Si $1<x<3$ alors $N(x)<0$. Si $3<x$ alors $N(x)>0$.

$f(1)-1+4-4\times0-\dfrac{3}{1}=2 \qquad f(3)=3+4-4\ \ln(3)-\dfrac{3}{3}=6-4\ \ln(3) \qquad \lim\limits_{x\to0} f(x)=-\infty$

Tableau de variations

x	0		1		3		$+\infty$
f '(x)		+	0	–	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗	2	↘	6-4ln(3)	↗	$+\infty$

3.b. $6-4\ \ln(3)\simeq1{,}606 \qquad \dfrac{5}{3}\simeq1{,}667 \qquad$ donc $\qquad 6-4\ \ln(3)<\dfrac{5}{3}<2$

L'équation $f(x)=3$ admet 3 solutions appartenant respectivement à $]0;1[$; $]1;3[$ et $]3;+\infty[$.

4. On calcule la fonction dérivée seconde de f

$f'(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2} \qquad u(x)=x^2-4x+3 \qquad u'(x)=2x-4 \qquad v(x)=x^2 \qquad v'(x)=2x$

$$f''(x)=\frac{x^2\times(2x-4)-(x^2-4x+3)\times2x}{x^4}=\frac{2x^3-4x^2-2x^3+8x^2-6x}{x^4}=\frac{4x^2-6x}{x^4}=\frac{x(4x-6)}{x^4}$$

$x\in]0;+\infty[$ donc le signe de $f''(x)$ est le signe de (4x-6)

$4x-6=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2} \qquad 4x-6>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{3}{2} \qquad 4x-6<0 \Leftrightarrow 0<x<\dfrac{3}{2}$

Sur l'intervalle $\left]0;\dfrac{3}{2}\right[$ la fonction f est concave et sur $\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right[$ la fonction f est convexe.

Le point $I\left(\dfrac{3}{2};f\left(\dfrac{3}{2}\right)\right)$ est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}+4-4\ \ln\left(\frac{3}{2}\right)-2=\frac{11}{2}-4\ \ln\left(\frac{3}{2}\right)-2=\frac{7}{2}-4\ \ln\left(\frac{3}{2}\right)\simeq1{,}878$$