

## Exercice 1

## commun à tous les candidats

4 points

Une entreprise reçoit quotidiennement de nombreux courriels (courriers électroniques).

Parmi ces courriels, 8 % sont du « spam », c'est-à-dire des courriers à intention publicitaire, voire malveillante, qu'il est souhaitable de ne pas ouvrir.

On choisit au hasard un courriel reçu par l'entreprise.

Les propriétés du logiciel de messagerie utilisé dans l'entreprise permettent d'affirmer que :

- La probabilité que le courriel choisi soit classé comme « indésirable » sachant que c'est un spam est égale à 0,9.
- La probabilité que le courriel choisi soit classé comme « indésirable » sachant que ce n'est pas un spam est égale à 0,01.

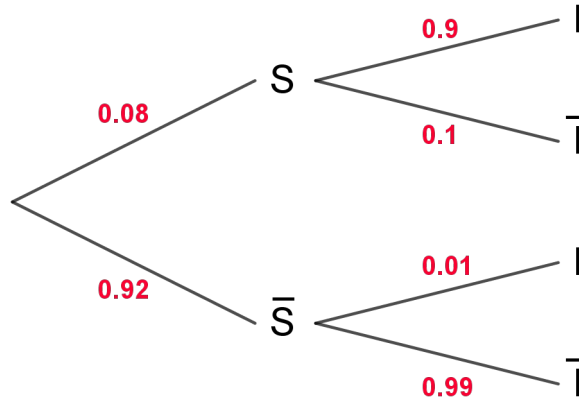
On note :

- $S$  l'événement « le courriel est un spam » ;
- $I$  l'événement « le courriel choisi est classé comme indésirable par le logiciel de messagerie ».
- $\bar{S}$  et  $\bar{I}$  les événements contraires de  $S$  et  $I$  respectivement.

1. Modéliser la situation étudiée par un arbre pondéré, sur lequel on fera apparaître les probabilités associées à chaque branche.
- 2.a. Démontrer que la probabilité que le courriel choisi soit un message de spam et qu'il soit classé indésirable est égale à 0,072.
- 2.b. Calculer la probabilité que le message choisi soit classé indésirable.
- 2.c. Le message choisi est classé comme indésirable. Quelle est la probabilité que ce soit effectivement un message de spam ? On donnera un résultat arrondi au centième.
3. On choisit au hasard 50 courriels parmi ceux reçus par l'entreprise. On admet que ce choix se ramène à un tirage au hasard avec remise de 50 courriels parmi l'ensemble des courriels reçus par l'entreprise. On appelle  $Z$  la variable aléatoire dénombrant les courriels de spam parmi les 50 choisis.
  - 3.a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire  $Z$ , et quels sont ses paramètres ?
  - 3.b. Quelle est la probabilité que, parmi les 50 courriels choisis, deux au moins soient du spam ? On donnera un résultat arrondi au centième.

**CORRECTION**

1. Parmi les courriels reçus par l'entreprise, 8 % sont du spam donc  $P(S)=0,08$  et  $P(\bar{S})=1-P(S)=0,92$ .
  - . La probabilité que le courriel choisi soit classé comme « indésirable » sachant que c'est un spam est égale à 0,9 donc  $P_S(I)=0,9$  et  $P_S(\bar{I})=1-P_S(I)=1-0,9=0,1$ .
  - . La probabilité que le courriel choisi soit classé comme « indésirable » sachant que ce n'est pas un spam est égale à 0,01 donc  $P_{\bar{S}}=0,01$  et  $P_{\bar{S}}(\bar{I})=1-P_{\bar{S}}(I)=1-0,01=0,99$ .
  - . On modélise la situation par l'arbre pondéré suivant :



2.a.  $P(S \cap I) = P(S) \times P_S(I) = 0,08 \times 0,9 = 0,072$

2.b. En utilisant la formule des probabilités totales :  
 $P(I) = P(S \cap I) + P(\bar{S} \cap I) = 0,072 + P(\bar{S}) \times P_{\bar{S}}(I) = 0,072 + 0,92 \times 0,01$   
 $P(I) = 0,072 + 0,0092 = 0,0812$

2.c.  $P_I(S) = \frac{P(S \cap I)}{P(I)} = \frac{0,072}{0,0812} = \frac{720}{812} = 0,89$  arrondi au centième.

- 3.a. On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :  
 on choisit au hasard un courriel reçu par l'entreprise  
 Succès : « le courriel choisi est un spam »      probabilité de succès  $P(S) = p = 0,08$   
 Échec : « le courriel choisi n'est pas un spam »      probabilité de l'échec  $P(\bar{S}) = q = 0,92$   
 On choisit, au hasard, 50 courriels, on suppose que l'on effectue des tirages avec remise donc indépendants.  
 $Z$  est la variable aléatoire égale au nombre de succès en 50 épreuves.  
 La loi de probabilité de  $Z$  est la loi binomiale de paramètres  $n=50$  et  $p=0,08$ .

- 3.b. En utilisant la calculatrice :  
 $P(Z \geq 2) = 0,92$   
 ou  $P(Z \geq 2) = 1 - P(Z=0) - P(Z=1)$   
 $P(Z=0) = q^{50} = 0,92^{50} = 0,0155$  à  $10^{-4}$  près  
 $P(Z=1) = \binom{50}{1} 0,08^1 \times 0,92^{49} = 0,0672$  à  $10^{-4}$  près  
 $P(Z \geq 2) = 1 - (P(Z=0) + P(Z=1))$   
 $P(Z=0) + P(Z=1) = 0,08$  arrondi au centième.  
 $P(Z \geq 2) = 0,92$ .