Exercice 3 commun à tous les candidats 6 points

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x-e^{-2x}$.
On appelle Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$.

2. Étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.

3. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

4. Déduire des questions précédentes le signe de f(x) suivant les valeurs de x.

Partie II

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=e^{-x}$.
Les courbes $\mathscr{C}$ et Γ (qui représente la fonction f de la **partie I**) sont tracées **sur le graphique donné en annexe qui est à compléter et à rendre avec la copie.**

Le but de cette partie est de déterminer le point de la courbe $\mathscr{C}$ le plus proche de l' origine O du repère et d'étudier la tangente à $\mathscr{C}$ ence point.

1. Pour tout nombre réel t, on note M le point de coordonnées $(t;e^{-t})$ de la courbe $\mathscr{C}$.
On considère la fonction h qui, au nombre réel t, associe la distance OM.
On a donc : $h(t)=OM$, c'est à dire : $h(t)=\sqrt{t^2+e^{-2t}}$.

1.a. Montrer que, pour tout réel t, $h'(t)=\dfrac{f(t)}{\sqrt{t^2+e^{-2t}}}$ où f représente la fonction étudiée dans la **partie I.**

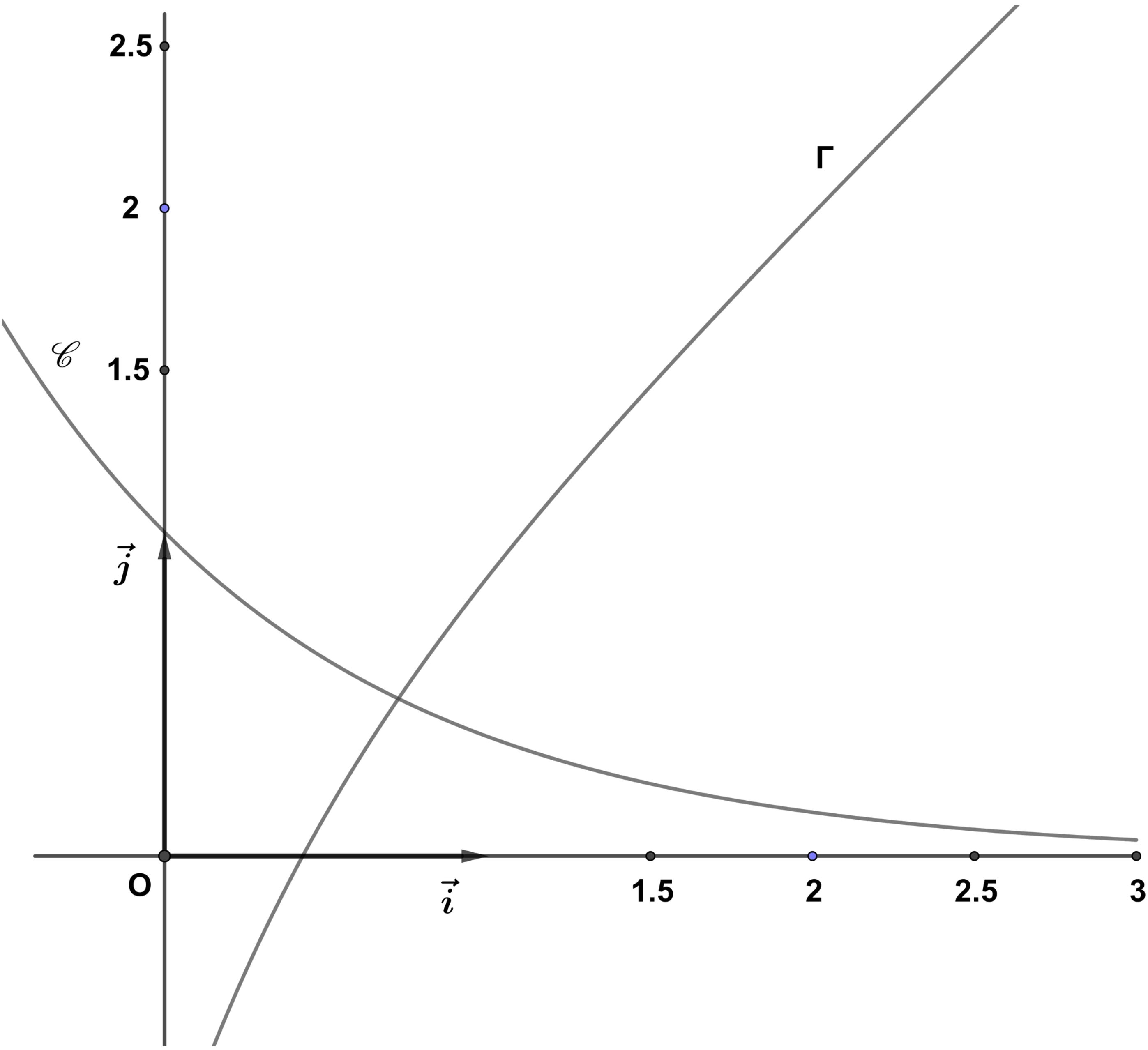
1.b. Démontrer que le point A de coordonnées $(\alpha;e^{-\alpha})$ est le point de la courbe $\mathscr{C}$ pour lequel la longueur OM est minimale.
Placer ce point sur le **graphique donné en annexe, à rendre avec la copie.**

2. On appelle T la tangente en A à la courbe $\mathscr{C}$.

2.a. Exprimer en fonction de α le coefficient directeur de la tangente T.
On rappelle que le coefficient de la droite (OA) est égal à $\dfrac{e^{-\alpha}}{\alpha}$.
On rappelle également le résultat suivant qui pourra être utilisé sans démonstration :
Dans un repère orthonormé du plan, deux droites D et D' de coefficients directeurs respectifs m et m' sont perpendiculaires si et seulement si le produit mm' est égal à -1.

2.b. Démontrer que la droite (OA) et la tangente T sont perpendiculaires .
Tracer ces droites sur le **graphique donné en annexe, à rendre avec la copie.**

ANNEXE À COMPLÉTER ET À RENDRE AVEC LA COPIE



CORRECTION

Partie I

1. Pour tout nombre réel x, $f(x)=x-e^{-2x}$

$\lim_{x\to+\infty}(-2x)=-\infty$ $\lim_{X\to-\infty}e^{X}=0$ donc $\lim_{x\to+\infty}e^{-2x}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

$\lim_{x\to-\infty}(-2x)=+\infty$ $\lim_{X\to+\infty}e^{X}=+\infty$ donc $\lim_{x\to-\infty}e^{-2x}=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

2. $(e^u)'=u'e^u$ Pour tout nombre réel x, $u(x)=2x$ et $u'(x)=-2$

$f'(x)=1-(-2e^{-2x})=1+e^{-2x}>0$

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
f '(x)	+	
f(x)	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3. f esune fonction dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que 0 admet un unique antécédent α appartenant à $\mathbb{R}$ c'est à dire que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α.

α est l'abscisse du point, d'intersection de Γ et de l'axe ces abscisses, noté B.

$f(0)=-e^0=-1<0$ $f(1)=1-e^{-1}>0$ donc $0<\alpha<1$

En utilisant la calculatrice.

$f(0{,}4)\simeq-0{,}049<0$ $f(0{,}5)\simeq0{,}132>0$ donc $0{,}4<\alpha<0{,}5$

$f(0{,}42)\simeq-0{,}012<0$ $f(0{,}43)\simeq0{,}007>0$ donc $0{,}42<\alpha<0{,}43$

0,43 est une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Si $x<\alpha$ alors $f(x)<f(\alpha)=0$.

Si $\alpha<x$ alors $f(\alpha)=0<f(x)$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f(x)		–	0	+	

Partie II

1. $O(0;0)$ $M(t;e^{-t})$ $OM^2=t^2+(e^{-t})^2=t^2+e^{-2t}$

$OM=\sqrt{t^2+e^{-2t}}=h(t)$

1.a. $(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

$u(t)=t^2+e^{-2t}$ $u'(t)=2t-2e^{-2t}=2(t-e^{-2t})=2f(t)$

$h'(t)=\dfrac{2f(t)}{2\sqrt{t^2+e^{-2t}}}=\dfrac{f(t)}{\sqrt{t^2+e^{-2t}}}$

$\sqrt{t^2+e^{-2t}}>0$ donc le signe de $h'(t)$ est le signe f(t).

t	$-\infty$		α		$+\infty$
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
$h(t)$		$\searrow$	$h(\alpha)$	$\nearrow$	

La valeur de $h(t)$ est minimale pour $t=\alpha$.

La distance OM est minimale lorsque $M=A$ avec $A(\alpha ; e^{-\alpha})$.

A est le point d'intersection de $\mathscr{C}$ et de la droite d'équation $t=\alpha$ (droite passant par B).

2.a. Le coefficient directeur de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse α est $g'(\alpha)$.

$g(x)=e^{-x}$ $\quad$ $g'(x)=-e^{-x}$ $\quad$ $g'(\alpha)=-e^{-\alpha}=m$

2.b. Le coefficient directeur de la droite (OA) est $\frac{e^{-\alpha}}{\alpha}=m'$.

$m\times m'=-e^{-\alpha}\times\frac{e^{-\alpha}}{\alpha}=\frac{-e^{-2\alpha}}{\alpha}$

Or $f(\alpha)=\alpha-e^{-2\alpha}=0$ donc $\alpha=e^{-2\alpha}$ et $1=\frac{e^{-2\alpha}}{\alpha}$.

Conséquence : $m\times m'=-1$ et les droites T et (OA) sont perpendiculaires.

T est la perpendiculaire à (OA) passant par A.

Constuction

On place le point $B(\alpha ; 0)$.

On trace la parallèle à l'axe des ordonnées passant par B.

Le point d'intersection de cette droite et la courbe $\mathscr{C}$ est le point A.

Puis on trace la perpendiculaire à la droite (OA) passant par A et on obtient la droite T.

ANNEXE À COMPLÉTER ET RENDRE AVEC LA COPIE