Exercice A — au choix du candidat — 5 points

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A et B.
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.
Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

Exercice A

Principaux domaines abordés: **Suites numériques - raisonnement par récurrence;**

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$u_0=16$; $v_0=5$ et pour tout entier naturel n : $\begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{3u_n+2v_n}{5} \\ v_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2} \end{cases}$

1. Calculer u_1 et v_1 .et

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n=u_n-v_n$.

2.a. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $0{,}1$.
En déduire,pour tout entier naturel n, l'expression de w_n en fonction de n.

2.b. Préciser le signe de la suite (w_n) et la limite de cette suite.

3.a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1}-u_n=-0{,}4\,w_n$.

3.b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est croissante.
On admet ce résultat, et on remarque qu'on a alors : pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant v_0=5$.

3.c. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 5$.
En déduire que la suite (u_n) est convergente. On appelle L la limite de (u_n) .

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est convergente.
On admet ce résultat , et on appelle L' la limite de (v_n) .

4.a. Démontrer que $L=L'$.

4.b. On considère la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n par : $c_n=5u_n+4v_n$.
Démontrer que la suite (c_n) est constante, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n, on a : $c_{n+1}=c_n$.
En déduire que, pour tout entier naturel n, $c_n=100$.

4.c. Déterminer la valeur commune des limites L et L'.

CORRECTION

1. $u_1=\frac{3u_0+2v_0}{5}=\frac{3\times16+2\times5}{5}=\frac{58}{5}=11{,}6$ $\quad v_1=\frac{u_0+v_0}{2}=\frac{16+5}{2}=\frac{21}{2}=10{,}5$

2. Pour tout entier naturel n :

$$w_{n+1}=u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{3u_n+2v_n}{5}-\frac{u_n+v_n}{2}=\frac{2(3u_n+2v_n)-5(u_n+v_n)}{5\times2}=\frac{6u_n+4v_n-5u_n-5v_n}{10}=\frac{u_n-v_n}{10}$$

$$w_{n+1}=\frac{1}{10}(u_n-v_n)=0{,}1\,w_n$$

donc (w_n) est une suite géométrique de raison $q=0{,}1$.

$w_0=u_0-v_0=16-5=11$

Pour tout entier naturel n : $w_n=w_0\times q^n=11\times0{,}1^n$.

$0{,}1^n>0$ donc $w_n>0$ et la suite (w_n) est positive.

$0\leqslant0{,}1<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}0{,}1^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=0$.

3.a. Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n+2v_n}{5}-u_n=\frac{3u_n+2v_n-5u_n}{5}=\frac{-2u_n+2v_n}{5}=-\frac{2}{5}(u_n-v_n)=-0{,}4\,w_n$$

3.b. Pour tout entier naturel n :

$w_n>0$ et $-0{,}4\,w_n<0$ donc $u_{n+1}-u_n<0$. La suite (u_n) est décroissante.

4.a. On veut démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a : $u_n>5$.

Initialisation

$u_0=16\geqslant5$, la propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $u_n\geqslant5$ et on doit démontrer que $u_{n+1}\geqslant5$.

Or $u_{n+1}=\frac{3u_n+2v_n}{5}$

$u_n\geqslant5$ donc $3u_n\geqslant15$ et $v_n\geqslant5$ donc $2v_n\geqslant10$

Conséquence : $u_{n+1}\geqslant\frac{15+10}{5}=\frac{25}{5}=5$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n\geqslant5$.

(u_n) est une suite décroissante et minorée par 5 donc (u_n) est une suite convergente et on note $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=L$.

4.a. $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=L'$.

Pour tout entier naturel n, on a : $u_n-v_n=w_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=L-L'$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=0$ donc $L-L'=0$ et $L=L'$.

4.b. Pour tout entier naturel n : $c_n=5u_n+4v_n$.

$$c_{n+1}=5\times\frac{3u_n+2v_n}{5}+4\times\frac{u_n+v_n}{2}=3u_n+2v_n+2u_n+2v_n=5u_n+4v_n=c_n\ .$$

La suite (c_n) est une suite constante.
$c_n = c_0 = 5 \times 16 + 4 \times 5 = 80 + 20 = 100$.

4.c. Pour tout entier naturel n, $c_n = 5u_n + 4v_n = 100$.
$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = L$ $\lim_{n \to +\infty} (5u_n + 4v_n) = 5L + 4L = 9L$
donc $9L = 100$ et $L = \frac{100}{9}$.