Exercice B au choix du candidat 5 points

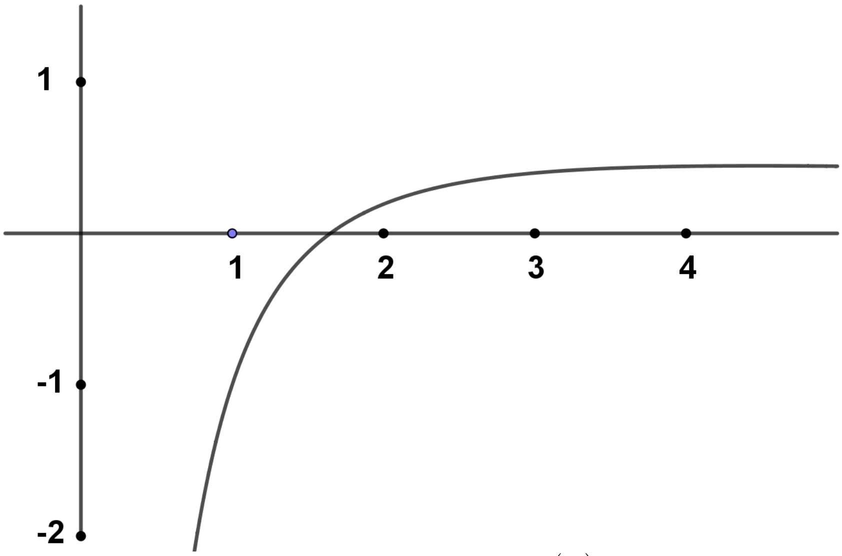
Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A et B.
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.
Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

Exercice B

Principaux domaines abordés:
Fonction logarithme - limites - dérivation

Partie I

Le graphique ci-dessous donne la représentation graphique dans un repère orthonormé de la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{2\ln(x)-1}{x}$.



1. Déterminer par le calcul l'unique solution α de l'équation $f(x)=0$.
On donnera la valeur exacte de α ainsi que la valeur arrondie au centième.

2. Préciser, par lecture graphique, le signe de f(x) lorsque x varie dans l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie II

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x)=(\ln(x))^2-\ln(x)$.

1.a. Déterminer la limite de la fonction g en 0.
1.b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

2. On note g' la fonction dérivée de la fonction sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
Démontrer que, pour tout nombre réel x de $]0;+\infty[$, on a : $g'(x)=f(x)$, où f désigne la fonction définie dans la **partie I.**

3. Dresser le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
On fera figurer dans ce tableau les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$, ainsi que la valeur du minimum de g sur $]0;+\infty[$.

4. Démontrer que, pour tout nombre réel $m>-0,25$, l'équation $g(x)=m$ admet exactement deux solutions.

5. Déterminer par le calcul les deux solutions de l'équation $g(x)=0$.

CORRECTION

Partie I

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $f(x)=\dfrac{2\ln(x)-1}{x}$.

1. $x\in]0;+\infty[$

$f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2\ln(x)-1}{x}=0 \Leftrightarrow 2\ln(x)-1=0 \Leftrightarrow 2\ln(x)=1 \Leftrightarrow \ln(x)=\dfrac{1}{2}=0{,}5 \Leftrightarrow x=e^{0{,}5}=\sqrt{e}$

$\alpha=\sqrt{e}\simeq 1{,}65$ (valeur arrondie au centième).

2. α est l'abscisse du point d'intersection de la courbe représentative de f et de l'axe des abscisses.
Si $0<x<\alpha$ alors la courbe est en dessous de l'axe des abscisses et $f(x)<0$.
Si $\alpha<x$ alors la courbe est au dessus de l'axe des abscisses et $f(x)>0$.

x	0		α		+∞
f(x)	‖	–	0	+	

Partie II

1.a. $x\in]0;+\infty[$ $g(x)=(\ln(x))^2-\ln(x)=\ln(x)(\ln(x)-1)$

$\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(x)-1)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=+\infty$.

1.b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(x)-1)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.

2. $(\ln(x))'=\dfrac{1}{x}$ $\qquad((\ln(x))^2)'=2\ln(x)\times(\ln(x))'=2\ln(x)\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{2\ln(x)}{x}$

$g'(x)=\dfrac{2\ln(x)}{x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2\ln(x)-1}{x}=f(x)$

3.

x	0		α		+∞
g'(x)	‖	–	0	+	
g(x)	‖ +∞	↘	-0.25	↗	+∞

$g(\alpha)=(\ln(\alpha))^2-\ln(\alpha)$ or $\ln(\alpha)=0{,}5$ et $g(\alpha)=0{,}25-0{,}5=-0{,}25$

4. g est dérivable et strictement décroissante sur l'intervalle $]0;\alpha[$ à valeurs dans $]-0{,}25;+\infty[$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que si $m\in]-0{,}25;+\infty[$ alors m admet un unique antécédent β_1 appartenant à $]0;\alpha[$.
g est dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $]\alpha;+\infty[$ à valeurs dans $]-0{,}25;+\infty[$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que si $m\in]-0{,}25;+\infty[$ alors m admet un unique antécédent β_2 appartenant à $]\alpha;+\infty[$.
Conséquence :
Si $m>-0{,}25$ alors l'équation $g(x)=m$ admet exactement 2 solutions β_1 et β_2.

5. $g(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x)(\ln(x)-1)=0 \Leftrightarrow (\ln(x)=0$ ou $\ln(x)-1=0)$

$\ln(x)=0 \Leftrightarrow x=e^0=1$ $\qquad \ln(x)=1 \Leftrightarrow x=e^1=e$

Les deux solutions de l'équation $g(x)=0$ sont : 1 et e.