Exercice 1 commun à tous les candidats 4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point.Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{e^{2x}}{x}$.

On donne l'expression de la dérivée seconde f'' de f, définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$f''(x)=\frac{2e^{2x}(2x^2-2x+1)}{x^3}$.

1. La fonction f', dérivée de f, est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

a. $f'(x)=2e^{2x}$

b. $f'(x)=\frac{e^{2x}(x-1)}{x^2}$

c. $f'(x)=\frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$

d. $f'(x)=\frac{e^{2x}(1+2x)}{x^2}$

2. La fonction f :

a. est décroissante sur $]0;+\infty[$

b. est monotone sur $]0;+\infty[$

c. admet un minimum en $\frac{1}{2}$

d. admet un maximum en $\frac{1}{2}$

3. La fonction f admet pour limite en $+\infty$.

a. $+\infty$

b. 0

c. 1

d. e^{2x}

4. La fonction f :

a. est concave sur $]0;+\infty[$

b. est convexe sur $]0;+\infty[$

c. est concave sur $\left]0;\frac{1}{2}\right]$

d. est représentée par une courbe admettant un point d'inflexion

CORRECTION

1. Réponse : c

Preuve non demandée

$f(x)=\dfrac{e^{2x}}{x}$ $u(x)=e^{2x}$ $u'(x)=2e^{2x}$ $v(x)=x$ $v'(x)=1$

$$f'(x)=\frac{x\times(2e^{2x})-1\times e^{2x}}{x^2}=\frac{(2x-1)e^{2x}}{x^2}=\frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$$

2. Réponse : c

Preuve non demandée

Le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$ est le signe de 2x-1.

$2x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ $2x-1>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}$ $2x-1<0 \Leftrightarrow x<\dfrac{1}{2}$

donc la fonction f admet un minimum en $\dfrac{1}{2}$.

3. Réponse : a

Preuve non demandée

$$f(x)=\frac{e^{2x}}{x}=\frac{e^x\times e^x}{x}=e^x\times\frac{e^x}{x}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

4. Réponse : b

Preuve non demandée

$x\in]0;+\infty[$ $f''(x)=\dfrac{2e^{2x}(2x^2-2x+1)}{x^3}$

Le signe de $f''(x)$ est le signe de $T(x)=2x^2-2x+1$ sur $]0;+\infty[$.

$T(x)=2x^2-2x+1$ $\Delta=4-4\times2\times1=-4<0$.

Le coefficient de x^2 est positif donc pour tout nombre réel x, $T(x)>0$.

Pour tout nombre réel de l'intervalle $]0;+\infty[$, $f''(x)>0$ donc f est convexe sur $]0;+\infty[$.