Exercice 2 commun à tous les candidats 5 points

Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques. On estime que 5 % des pièces produites par cette chaîne sont défectueuses.

Un ingénieur a mis au point un test à appliquer aux pièces. Ce test a deux résultats possibles : « positif » ou « négatif ».

On applique ce test à une pièce choisie au hasard dans la production de la chaîne.
On note P(E) la probabilité d'un événement E.

On considère les événements suivants :
- D : « la pièce est défectueuse » ;
- T : « la pièce présente un test positif » ;
- $\overline{D}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les événements contraires de D et T.

Compte tenu des caractéristique du test, on sait que :
- La probabilité qu'une pièce présente un test positif, sachant qu'elle est défectueuse, est égale à 0,98 ;
- La probabilité qu'une pièce présente un test négatif, sachant qu 'elle n'est pas défectueuse, est égale à 0,97.

Les parties 1 et 2 peuvent être traitées de façon indépendante

Partie 1

1. Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2.a. Déterminer la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans la production de la chaîne soit défectueuse et présente un test positif

2.b. Démontrer que : $P(T)=0{,}0775$.

3. On appelle **valeur prédictive positive** du test la probabilité qu'une pièce soit défectueuse, sachant que le test est positif. On considère que pour être efficace, un test doit avoir une valeur prédictive positive supérieure à 0,95.
Calculer la valeur prédictive positive de ce test et préciser s'il est efficace.

Partie 2

On choisit un échantillon de 20 pièces dans la production de la chaîne, en assimilant ce choix à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre des pièces défectueuses dans cet échantillon.
On rappelle que $P(D)=005$.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et déterminer les paramètres de cette loi.

2. Calculer la probabilité que cet échantillon contienne au moins une pièce défectueuse.
On donnera un résultat arrondi au centième.

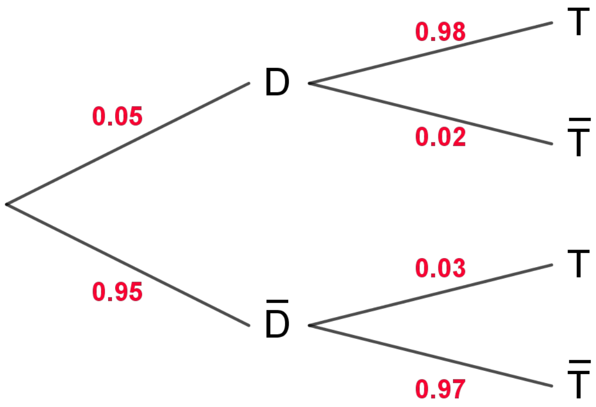
3. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat.

CORRECTION

Partie 1

1. L'énoncé précise :

- 5 % des pièces sont défectueuses donc $P(D)=0{,}05$ et $P(\bar{D})1-P(D)=1-0{,}05=0{,}95$.
- La probabilité qu'une pièce présente un test positif , sachant qu'elle est défectueuse, est égale à 0,98 donc $P_D(T)=0{,}98$ et $P_D(\bar{T})=1-P_D(T)=1-0{,}98=0{,}02$.
- La probabilité qu'une pièce présente un test négatif, sachant qu'elle n'est pas défectueuse, est égale à 0,97 donc $P_{\bar{D}}(\bar{T})=0{,}97$ et $P_{\bar{D}}(T)=1-P_{\bar{D}}(\bar{T})=1-0{,}97=0{,}03$.
- On obtient l'arbre pondéré suivant :



2.a. $P(D\cap T)=P(D)\times P_D(T)=0{,}05\times 0{,}98=0{,}049$

2.b. En utilisant la formule des probabilités totales :

$P(T)=P(D\cap T)+P(\bar{D}\cap T)$

$P(\bar{D}\cap T)=P(\bar{D})\times P_{\bar{D}}(T)=0{,}95\times 0{,}03=0{,}0285$

$P(T)=0{,}0490+0{,}0285=0{,}0775$

3. $P_T(D)=\dfrac{P(D\cap T)}{P(T)}=\dfrac{0{,}049}{0{,}0775}\simeq 0{,}63$

$0{,}63<0{,}95$ donc le test n'est pas efficace.

Partie 2

1. On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :
On choisit au hasard une pièce de la production.
Succès : « la pièce est défectueuse » la probabilité de succès est $p=0{,}05$;
Échec : « la pièce n'est pas défectueuse » la probabilité de l'échec est $q=0{,}95$.
On effectue 20 épreuves indépendantes car on assimile le choix des 20 pièces à des tirages avec remise.
X est la variables aléatoire égale au nombre de succès en 20 épreuves.
La loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres $n=20$ et $p=0{,}05$.

2. $P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)$

$P(X=0)=\binom{20}{0}\ p^0\times q^{20}=0{,}95^{20}\simeq 0{,}36$

$P(X\geqslant 1)=1-0{,}36=0{,}64$.

3. $E(X)=np=20\times 0{,}05=1$

En moyenne, il y a une pièce défectueuse sur 20.