Exercice 3 commun à tous les candidats 6 points

Cécile a invité des amis à déjeuner sur la terrasse. Elle a prévu en dessert un assortiment de gâteaux individuels qu'elle a acheté surgelés.

Elle sort les gâteaux du congélateur à – 19°C et les apporte sur la terrasse où la température ambiante est de 25°C.

Au bout de 10 minutes la température des gâteaux est de 1,3°C.

I – Premier modèle

On suppose que la vitesse de décongélation est constante, c'est-à-dire que l'augmentation de la température des gâteaux est la même minute par minute.

Selon ce modèle, déterminer quelle serait la température des gâteaux 25 minutes après leur sortie du congélateur.

Ce modèle semble-t-il pertinent ?

II - Second modèle

On note T_n la température des gâteaux, en degré Celsius, au bout de n minutes après leur sortie du congélateur ; ainsi $T_0=-19$.

On admet que pour modéliser l'évolution de la température, on doit avoir la relation suivante :
pour tout entier naturel n, $T_{n+1}-T_n=-0{,}06\times(T_n-25)$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $T_{n+1}=0{,}94\,T_n+1{,}5$.

2. Calculer T_1 et T_2 . On donnera des valeurs arrondies au dixième.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $T_n\leqslant 25$.
En revenant à la situation étudiée, ce résultat était-prévisible ?

4. Étudier le sens de variation de la suite (T_n) .

5. Démontrer que la suite (T_n) est convergente.

6. On pose, pour tout entier naturel n, $U_n=T_n-25$.

6.a. Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme U_0 .

6.b. En déduire que pour tout entier naturel n, $T_n=-44\times 0{,}94^n+25$.

6.c. En déduire la limite de la suite (T_n) . Interpréter ce résultat dans le contexte de la situation étudiée.

7.a. Le fabricant conseille de consommer les gâteaux au bout d'une demi-heure à température ambiante après leur sortie du congélateur. Quelle est alors la température atteinte par les gâteaux ?
On donnera une valeur arrondie à l'enntier le plus proche.

7.b. Cécile est une habituée de ces gâteaux, qu'elle aime déguster lorsqu'ils sont encore frais, à la température de $10°C$. Donner un encadrement entre deux entiers consécutifs du temps en minutes après lequel Cécile doit déguster son gâteau.

7.c. Le programme suivant, écrit en langage Python, doit renvoyer, après son exécution la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $T_n \geqslant 10$.

```
def seuil():
  n=0
  T= . . . . ..
  while T . . . . . . :
    T= . . . . . .
    n=n+1
  return n
```

Recopier ce programme sur la copie et compléter les lignes incomplètes afin que le programme renvoie la valeur attendue.

CORRECTION

I- Premier modèle

En 10 minutes, la température des gâteaux a augmenté de 19+1,03 = 20,3°.
Donc si on suppose que la vitesse de décongélation est constante alors la température des gâteaux augmenterait de 2,03°C par minute.
Au bout de 25 minutes, la température augmenterait de $25\times 2{,}03=50{,}75$°C.
On obtiendrait pour température des gâteaux : 31,75°C.
Ce modèle n'est pas pertinent car la température des gâteaux ne peut pas être supérieure à la température ambiante de 25°C.

II- Second modèle

1. Pour tout entier naturel n, $T_{n+1}-T_n=-0{,}06\times(T_n-25)$.
$T_{n+1}=-0{,}06\times T_n+0{,}06\times 25+T_n=(1-0{,}06)T_n+1{,}5=0{,}94\,T_n+1{,}5$.

2. $T_1=0{,}4\times T_0+15=-0{,}94\times 19+1{,}5=-16{,}36$
$T_1=-16{,}4$

$T_2=0{,}94\times T_1+1{,}5=-0{,}94\times 16{,}36+1{,}5=-13{,}8784$
$T_2=-13{,}9$

3. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour entier naturel n, on a : $T_n\leqslant 25$.
Initiation
$T_0=-19\leqslant 25$ donc la propriété est vérifiée pour $n=0$.
Hérédité
Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que : $T_n\leqslant 25$ et on doit démontrer que $T_{n+1}\leqslant 25$.
$T_{n+1}=0{,}94\,T_n+1{,}5$
Si $T_n\leqslant 25$ alors $T_{n+1}\leqslant 0{,}94\times 25+1{,}5=23{,}5+1{,}5=25$.
Conclusion
Le prince de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, $T_n\leqslant 25$.

4. Pour tout entier naturel n,
$T_{n+1}-T_n=0{,}94\,T_n+1{,}5-0{,}06\,T_n=0{,}06\times(25-T_n)\geqslant 0$
donc la suite (T_n) est croissante.

5. La suite (T_n) est croissante et majorée par 25 donc la suite (T_n) est convergente.

6. Pour tout entier naturel n, $U_n=T_n-25 \Leftrightarrow T_n=U_n+25$.

6.a. Pour tout entier naturel n :
$U_{n+1}=T_{n+1}-25=0{,}94\,T_n+1{,}5-25=0{,}94\times(U_n+25)-23{,}5=0{,}94\,U_n+0{,}94\times 25-23{,}5$
$U_{n+1}=0{,}94\,U_n+23{,}5-23{,}5=0{,}94\,U_n$
La suite (U_n) est la suite géométrique de raison 0,94 et de 1er terme : $U_0=T_0-25=-19-25=-44$.

6.b. Pour tout entier naturel n :
$U_n=U_0\times q^n=-44\times 0{,}94^n$
et $T_n=U_n+25=-44\times 0{,}94^n+25$

6.c. $0 \leqslant 0{,}94 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}94^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = 25$.

La température des gâteaux augmente jusque la température ambiante.

7.a. La température des gâteaux au bout de 30 minutes est :

$T_n = -44 \times 0{,}94^{30} + 25 = 18{,}1247\ldots$

La température des gâteaux arrondie à l'unité est : 18°C.

7.b. $T_n = 10 \Leftrightarrow -44 \times 0{,}94\,n + 25 = 10 \Leftrightarrow 15 = 44 \times 0{,}94^n = 0{,}94^n = \dfrac{15}{44}$

$\Leftrightarrow \ln(0{,}94^n) = \ln\left(\dfrac{15}{44}\right) \Leftrightarrow n \times \ln(0{,}94) = \ln\left(\dfrac{15}{44}\right) \Leftrightarrow n = \ln\left(\dfrac{15}{44}\right) : \ln(0{,}94) = 17{,}3920\ldots$

$17 < n < 18$

7.c.

```
def seuil():
  n=0
  T= -19
  while T< 10:
    T=0.94*T+1.5
    n=n+1
  return n
```

Si on exécute le programme Python on obtient : n=18.

Il faut 18 minutes pour que la température des gâteaux soit supérieure ou égale à 10°C.