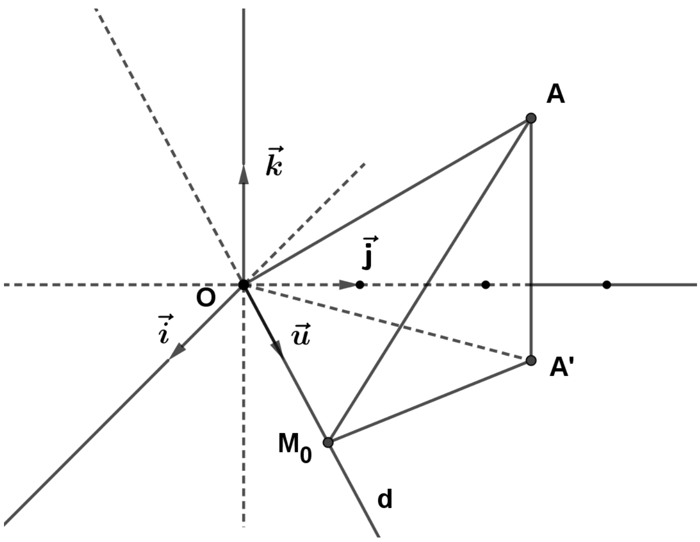
Exercice A au choix du candidat 5 points

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A et B.
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.
Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

EXERCICE A

Principaux domaines abordés: Orthogonalité dans l'espace   **Géométrie de l'espace rapporté à un repère orthonormé -**

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$,
on considère :
. le point A de coordonnées $(1;3;2)$,
. le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$,
. la droite d passant par l'origine O du repère et admettant pout vecteur directeur $\vec{u}$.



Le but de cet exercice est de déterminer le point de d le plus proche du point A et d'étudier quelques propriétés de ce point.
On pourra s'appuyer sur la figure ci-dessus pour raisonner au fur et à mesure des questions.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

2. Soit t un nombre réel quelconque, et M un point de la droite d, le point M ayant pour coordonnées $(t;t;0)$

2.a. On note AM la distance entre les points A et M. Démontrer que : $AM^2=2t^2-8t+14$.

2.b. Démontrer que le point M_0 de coordonnées $(2;2;0)$ est le point de la droite d pour lequel la distance AM est minimale. On admettra que la distance AM est minimale son carré AM^2 est minimal.

3. Démontrer que les droites (AM_0) et d sont orthogonales.

4. On appelle A’ le projeté orthogonal du point A sur le plan d’équation cartésienne $z=0$. Le point A’ admet pour coordonnées $(1;3;0)$.
Démontrer que le point M_0 est le point du plan $(AA'M_0)$ le plus proche du point O, origine du repère.

5. Calculer le volume de la pyramide $OM_0A'A$.
On rappelle que le volume d’une pyramide est donné par : $\mathcal{V}=\frac{1}{3}\mathcal{B}h$, où $\mathcal{B}$ est l’aire d’une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.

CORRECTION

1. d est la droite passant par l'origine O(0;0;0)et de vecteur di recteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, on obtient pour représentation paramétrique : d $\begin{cases}x=1\times t+0\\y=1\times t+0\\z=0\times t+0\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ soit d $\begin{cases}x=t\\y=t\\z=0\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

2.a. $M(t;t;0)$ $A(1;3;2)$ $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}t-1\\t-3\\-2\end{pmatrix}$

$AM^2=(t-1)^2+(t-3)^2+(-2)^2=t^2-2t+1+t^2-6t+9+2=2t^2-8t+14$.

2.b. $AM^2=2(t^2-4t+7)=2['t-2¿^2-4+7]=2(t-2)^2+6$

AM^2 est minimal pour la valeur $t=2$ donc la distance AM est minimale pour le point $M_0(2;2;0)$.

3. $\overrightarrow{OM_0}\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{M_0A}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$

$OM_0{}^2=2^2+2^2+0^2=4+4=8$ $OA^2=1^2+3^2+2^2=1+9+4=14$ $M_0A^2=(-1)^2+1^2+2^2=1+1+4=6$

$OM_0^2+M_0A^2=8+6=14=OA^2$.

La réciproque du théorème de Pythagore nous permet d'affirmer que le triangle OAM_0 est rectangle en M_0 .

Les droites $d=(OM_0)$ et (OA) sont donc orthogonales.

4. A' est le projeté orthogonal de A sur le plan (P) d'équation $z=0$, on a $(P)=(OM_0A')$.

Pour démontrer que le point M_0 est le point du plan (AM_0A') le plus proche du point O, il suffit de démontrer que M_0 est le projeté orthogonal de O sur le plan (AM_0A') c'est à dire que (OM_0) est orthogonale au plan (AM_0A') .

Pour cela , on démontre que (OM_0) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (AM_0A') .

Première méthode

A' est le projeté orthogonal de A sur (OM_0A') donc (AA') est orthogonale (OM_0A') et (AA') est orthogonale à la droite à la droite (OM_0) contenue dans le plan (OM_0A') .

(OM_0) est orthogonale aux droites (AA') et (AM_0) , sécantes en A et contenues dans le plan (AM_0A') donc (OM_0) est orthogonale à ce plan.

Deuxième méthode

On considère le triangle OM_0A' .

$\overrightarrow{OA'}\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OM_0}\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{M_0A'}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

$OA'^2=1^2+3^2+0^2=10$ $OM_0^2=2^2+2^2+0^2=8$ $M_0A'^2=(-1)^2+1^2+0^2=2$

$OM_0^2+M_0A'^2=8+2=10=OA'^2$

donc le triangle OM_0A' est rectangle en M_0 et (OM_0) est orthogonale à (M_0A') .

(OM_0) est orthogonale aux droites (AM_0) et (M_0A') sécantes en M_0 et contenues dans le plan (M_0AA') donc (OM_0) est orthogonale à ce plan.

5. On considère le tétraèdre $OM_0A'A$ et la base OM_0A' et la hauteur associée : AA' .

$\mathcal{B}=\frac{1}{2}\times OM_0\times M_0A'=\frac{1}{2}\times\sqrt{8}\times\sqrt{2}=\frac{1}{2}\times\sqrt{16}=\frac{4}{2}=2$ (en unité d'aire)

$\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$ $h=AA'=2$

$\mathcal{V}=\frac{1}{3}\times 2\times 2=\frac{4}{3}$ (en unité de volume).

. Si on considère la base $AA'M_0$ et la hauteur associée OM_0 .

$\mathcal{B}=\frac{1}{2}\times A'M_0\times AA'=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times 2=\sqrt{2}$ (en unité d'aire).

$h=OM_0=\sqrt{8}$

$\mathcal{V}=\frac{1}{3}\times\sqrt{2}\times\sqrt{8}=\frac{\sqrt{16}}{3}=\frac{4}{3}$ (en unité de volume)