Exercice B au choix du candidat 5 points

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A et B.
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.
Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

EXERCICE B

Principaux domaines abordés: **Equations différentielles - Fonction exponentielle**

On considère l'équation différentielle (E) : $y'=y+2x\mathrm{e}^x$.
On cherche l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels qui sont solutions de cette équation.

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=x^2\mathrm{e}^x$. On admet que u est dérivable et on note u' sa fonction dérivée. Démontrer que u est une solution particulière de (E).

2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=f(x)-u(x)$.

2.a. Démontrer que si la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) alors la fonction g est solution de l'équation différentielle : $y'=y$.
On admet que la réciproque de cette propriété est également vraie.

2.b. À l'aide de la résolution de l'équation différentielle $y'=y$, résoudre l'équation différentielle (E).

3. Étude de la fonction u

3.a. Étudier le signe de $u'(x)$ pour x variant dans $\mathbb{R}$.

3.b. Dresser le tableau de variations de la fonction u sur $\mathbb{R}$ (les limites ne sont pas demandées).

3.c. Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction u est concave.

CORRECTION

1. Pour tout nombre réel x :

$u(x)=x^2 e^x$

$(x^2)'=2x \qquad (e^x)'=e^x$

$u'(x)=2xe^x+x^2e^x$

$u'(x)=u(x)+2xe^x$

donc u est une solution particulière de l'équation différentielle (E) : $y'=y+2xe^x$.

2.a. Pour tout nombre réel x :

$g(x)=f(x)-u(x)$ donc $g'(x)=f'(x)-u'(x)$.

Si f est une solution de (E) alors, pour nombre réel x, $f'(x)=f(x)+2xe^x$ et $g'(x)=f'(x)-u'(x)$

donc $g'(x)=f(x)+2xe^x-u(x)-2xe^x=f(x)-u(x)=g(x)$

g est solution de l'équation différentielle $y'=y$.

On admet la réciproque

f est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si g est solution de l'équation différentielle $y'=y$.

2.b. Les solutions de l'équation $y'=y$ sont les fonctions g_k définies sur $\mathbb{R}$ par $g_k(x)=ke^x$ (k est une constante réelle).

L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f_k(x)=g_k(x)+u(x)=ke^x+x^2e^x$.

Car $g=f-u \Leftrightarrow f=g+u$.

3.a. $u'(x)=2xe^x+x^2e^x=(x^2+2x)e^x$

Pour tout nombre réel x, $e^x>0$ donc le signe de $u'(x)$ est le signe du trinôme : $T(x)x^2+2x$, de racines -2 et 0 et le coefficient de x^2 est positif.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
u'(x)		+	0	−	0	+	

3.b. $u(0)=0$ et $4e^{-2}$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
u'(x)		+	0	−	0	+	
u(x)		↗	$4e^{-2}$	↘	0	↗	

3.c. $u'(x)=2xe^x+x^2e^x$

$u''(x)=2e^x+2xe^x+2xe^x+x^2e^x$

$u''(x)=(x^2+4x+2)e^x$

Le signe de $u''(x)$ est le signe du trinôme $T_1(x)=x^2+4x+2$.

$\Delta_1=4^2-4\times2\times1=16-8=8=(2\sqrt{2})^2$

$x_1=\dfrac{-4-2\sqrt{2}}{2}=-2-\sqrt{2} \qquad x_2=\dfrac{-4+2\sqrt{2}}{2}=-2+\sqrt{2}$

Le coefficient de x^2 de $T_1(x)$ est positif.

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{2}$		$-2+\sqrt{2}$		$+\infty$
$u''(x)$		+	0	−	0	+	

$u''(x) \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-2-\sqrt{2}\,;-2+\sqrt{2}]$

Le plus grand intervalle sur lequel la fonction u est concave est $[-2-\sqrt{2}\,;-2+\sqrt{2}]$.