Exercice 2 commun à tous les candidats 6 points

Dans cet exercice, les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.
La leucose féline est une maladie touchant les chats ; elle est provoquée par un virus.
Dans un grand centre vétérinaire, on estime à 40 % la proportion de chats porteurs de la maladie.
On réalise un test de dépistage de la maladie parmi les chats présents dans ce centre vétérinaire.
Ce test possède les caractéristiques suivantes.

. Lorsque le chat est porteur de la maladie, son test est positif dans 90% des cas.
. Lorsque le chat n'est pas porteur de la maladie, son test est négatif dans 85 % des cas.

On choisit un chat au hasard dans le centre vétérinaire et on considère les événements suivants :

. M : « Le chat est porteur de la maladie » ;
. T : « Le test du chat est positif » ;
. $\overline{M}$ et $\overline{T}$ désignent les événements contraires des événements M et T respectivement.

1.a. Traduire la situation par un arbre pondéré.
1.b. Calculer la probabilité que le chat soit porteur de la maladie et que son test soit positif.
1.c. Montrer que la probabilité que le test du chat soit positif est égale à 0,45.
1.d. On choisit un chat parmi ceux dont le test est positif ; Calculer la probabilité qu'il soit porteur de la maladie.

2. On choisit dans le centre vétérinaire un échantillon de 20 chats au hasard. On admet que l'on peut assimiler ce choix à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de chats présentant un test positif dans l'échantillon choisi.
2.a. Déterminer, en justifiant, la loi suivie par la variable aléatoire X.
2.b. Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon exactement 5 chats présentant un test positif.
2.c. Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon au plus 8 chats présentant un test positif.
2.d. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3. Dans cette question, on choisit un échantillon de n chats dans le centre, qu'on assimile encore à un tirage avec remise. On note p_n la probabilité qu'il y ait au moins un chat présentant un test positif dans cet échantillon.
3.a. Montrer que $p_n = 1 - 0{,}55^n$.
3.b. Décrire le rôle du programme ci-dessous écrit en langage Python, dans lequel la variable n est un entier naturel et la variable p un nombre réel.

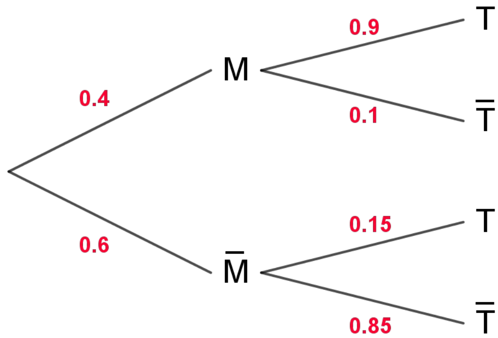
```
def seuil():
  n=0
  p=0
  while p<0.99:
    n=n+1
    p=1-0.55**n
  return n
```

3.c. Déterminer, en précisant la méthode employée, la valeur renvoyée par ce programme.

CORRECTION

1.a. L'énoncé précise :

- On estime 40 % la proportion des chats porteur de la maladie donc
  $P(M)=\frac{40}{100}=0,4$ et $P(\bar{M})=1-0,4=0,6$.
- Lorsque le chat est porteur de la maladie, son test est positif dans 90 % des cas :
  $P_M(T)=0,9$ et $P_M(\bar{T})=1-0,9=0,1$.
- Lorsque le chat n'est pas porteur de la maladie, son test est négatif dans 85 % des cas donc :
  $P_{\bar{M}}(\bar{T})=0,15$ et $P_{\bar{M}}(T)=1-0,15=0,85$.
- Arbre de probabilités



1.b. $P(M\cap T)=P(M)\times P_M(T)=0,4\times 0,9=0,36$

1.c. En utilisant la formule des probabilités totales.
$P(T)=P(M\cap T)+P(\bar{M}\cap T)$
$P(\bar{M}\cap T)=P(\bar{M})\times P_{\bar{M}}(T)=0,6\times 0,15=0,09$
$P(T)=0,36+0,09=0,45$.

1.d. $P_T(M)=P\frac{M\cap T}{P(T)}=\frac{0,36}{0,45}=0,8$.

2.a. On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :
on choisit un chat au hasard parmi les 20 chats de l'échantillon.
Succès : $S=T$: « le test du chat choisi est positif ».
La probabilité de succès est égale à $p=P(S)=P(T)=0,45$.
Échec : $\bar{S}=\bar{T}$: « le test du chat choisi est négatif ».
La probabilité de l'échec est égale à $q=P(\bar{S})=P(\bar{T})=1-0,45=0,55$.
On suppose les tirages avec remise donc on suppose que les épreuves sont indépendantes.
X est la variable aléatoire égale au nombre de succès en 20 épreuves.
La loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres $n=20$ et $p=0,45$.

2.b. $P(X=5)=\binom{20}{5}\ p^5\times q^{15}=\binom{20}{5}\ 0,45^5\times 0,55^{15}$.
En utilisant la calculatrice et en arrondissant au millième, on obtient :
$P(X=5)\simeq 0,015$.

2.c. En utilisant la calculatrice :
$P(X\leqslant 8)\simeq 0,414$.

2.d. $E(X)=np=20\times 0,45=9$.

Sur un grand nombre d'échantillons, en moyenne il y aura 9 chats ayant un test positif pour un échantillon de 20 chats.

3.a. Soit E_n l'événement, dans l'échantillon choisi au hasard, de n chats il y a au moins un chat présentant un test positif .
$\overline{E_n}$ est l'événement : les n chats de l'échantillon ont un test négatif.
$P(\overline{E_n})=q^n=0,55^n$ et $p_n=P(E_n)=1-0,55^n$.

3.b. Le programme détermine le nombre minimal n de chats dans l'échantillon choisi pour que la probabilité d'avoir au moins un chat un test positif, soit supérieure ou égale à 0,99.

3.c. Si on exécute le programme on obtient : $n=8$.

. Par résolution d'une inéquation :

$p_n \geqslant 0,99 \quad \Leftrightarrow \quad 1-0,55^n \geqslant 0,99 \quad \Leftrightarrow \quad 0,01 \geqslant 0,55^n$

La fonction ln est croissante sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow \quad \ln(0,01) \geqslant \ln(0,55^n) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(0,01) \geqslant n \times \ln(0,55)$

$0<0,55<1$ donc $\ln(0,55)<0$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,55)} \leqslant n$

$\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,55)} \simeq 7,703$ et n est un entier naturel.

$\Leftrightarrow \quad 8 \leqslant n$ la valeur minimale de n est 8.

. Par balayage :

$0,55^7 \simeq 0,015 > 0,01$

$0,55^8 \simeq 0,008 < 0,01$ donc la valeur minimale de n est 8.