Exercice 3 commun à tous les candidats 5 points

On considère la suite (u_n) définie part : $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{4u_n}{u_n+4}$.

1. La copie d'écran ci-dessous présente les valeurs, calculées à l'aide d'un tableur, des termes de la suite (u_n) pour n variant de 0 à 12 ainsi que celles du quotient $\frac{4}{u_n}$ (avec, pour les valeurs de u_n ,affichage de deux chiffres pour les parties décimales).

n	u_n	$\frac{4}{u_n}$
0	1.00	4
1	0.80	5
2	0.67	6
3	0.57	7
4	0.50	8
5	0.44	9
6	0.40	10
7	0.36	11
8	0.33	12
9	0.31	13
10	0.29	14
11	0.27	15
12	0.25	16

À l'aide de ces valeurs, conjecturer l'expression de $\frac{4}{u_n}$ en fonction de n.

Le but de cet exercice est de démontrer cette conjecture (question **5.**), et d'en déduire la limite de la suite (u_n) (question **6.**).

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n>0$.

3. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

4. Que peut-on conclure des questions **2.** et **3.** concernant la suite (u_n) ?

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n=\frac{4}{u_n}$.

Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.
En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fontion de n.

6. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.
En déduire la limite de la suite (u_n).

CORRECTION

1. Conjecture : $\frac{4}{u_n}=n+4$.

2. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n>0$.
Initialisation
$u_0=1>0$, la propriété est vérifiée pour $n=0$.
Hérédité
Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $u_n>0$ et on doit démontrer que $u_{n+1}>0$.
Si $u_n>0$ alors $4u_n>0$ et $u_n+4>0$ donc $u_{n+1}=\frac{4u_n}{u_n+4}>0$.
Conclusion
Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a : $u_n>0$.

3. Pour tout entier naturel n :
$$u_{n+1}-u_n=\frac{4u_n}{u_n}-u_n=\frac{4u_n-u_n^2-4u_n}{u_n+4}=\frac{-u_n^2}{u_n+4} .$$
Or $-u_n^2<0$ et $u_n+4>0$ donc $u_{n+1}-u_n<0$ et la suite (u_n) est décroissante.

4. (u_n) est une suite décroissante et minorée par 0 donc la suite (u_n) est convergente.

5. Pour tout entier naturel n :
$$v_{n+1}-v_n=\frac{4}{u_{n+1}}-\frac{4}{u_n}=4\times\left(\frac{u_n+4}{4u_n}\right)-\frac{4}{u_n}=\frac{u_n+4-4}{u_n}=1 .$$
Donc la suite (v_n) est la suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $v_0=\frac{4}{u_0}=\frac{4}{1}=4$.

Pour tout entier naturel n :
$v_n=v_0+nr=4+n\times1=4+n$.

6. $v_n=\frac{4}{u_n} \Leftrightarrow u_n=\frac{4}{v_n}=\frac{4}{4+n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(4+n)=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{4+n}\right)=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$.