Exercice A au choix du candidat 5 points

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A et B.
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.
Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

EXERCICE A

Principaux domaines abordés:
Fonction logarithme - Dérivation

Partie I

On désigne par h la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : . $h(x)=1+\frac{\ln(x)}{x^2}$.

On admet que la fonction h est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de h en 0 et en $+\infty$.

2. Montrer que, pour tout nombre réel x de $]0;+\infty[$, $h'(x)=\frac{1-2\ln(x)}{x^3}$.

3. En déduire les variations de la fonction h sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

4. Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique α appartenant à $]0;+\infty[$ et vérifier que : $\frac{1}{2}<\alpha<1$.

5. Déterminer le signe de $h(x)$ pour x appartenant à $]0;+\infty[$.

Partie II

On désigne par f_1 et f_2 les fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par :
$f_1(x)=x-1-\frac{\ln(x)}{x^2}$ et $f_2(x)=x-2-\frac{2\ln(x)}{x^2}$.

On note $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les représentations graphiques respectives de f_1 et f_2 dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à $]0;+\infty[$, on a :
$f_1(x)-f_2(x)=h(x)$.

2. En déduire des résultats de la **Partie I** la position relative des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
On justifiera que leur unique point d'intersection a pour coordonnées $(\alpha;\alpha)$.
On rappelle que α est l'unique solution de l'équation $h(x)=0$.

CORRECTION

Partie I

1. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$.

. $h(x)=1+\frac{\ln(x)}{x^2}=1+\frac{1}{x^2}\times\ln(x)$.

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$ et $\lim_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$ donc $\lim_{x\to 0}h(x)=-\infty$

. $h(x)=1+\frac{\ln(x)}{x^2}=1+\frac{1}{x}\times\frac{\ln(x)}{x}$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)=0$ donc $\lim_{x\to+\infty}h(x)=1$.

2. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$

$u(x)=\ln(x)$ $\qquad u'(x)=\frac{1}{x}$

$v(x)=x^2$ $\qquad v'(x)=2x$

$u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)=\frac{1}{x}\times x^2-(\ln(x))\times 2x=x-2x\ln(x)=x(1-2\ln(x))$

$h'(x)=\frac{x(1-2\ln(x))}{(x^2)^2}=\frac{1-2\ln(x)}{x^3}$.

3. $x\in]0;+\infty[$ donc $x^3>0$

$h'(x)=0 \Leftrightarrow 1-2\ln(x)=0 \Leftrightarrow 1=2\ln(x) \Leftrightarrow \ln(x)=\frac{1}{2}=0{,}5 \Leftrightarrow x=e^{0,5}=\sqrt{e}$

$h'(x)>0 \Leftrightarrow 1-2\ln(x)>0 \Leftrightarrow 1>2\ln(x)>0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}>\ln(x) \Leftrightarrow e^{0,5}=\sqrt{e}>x$

car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$h'(x)<0 \Leftrightarrow \sqrt{e}<x$

Tableau de variations de h

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
h'(x)	‖	+	0	−	
h(x)	‖ $-\infty$	↗	$h(\sqrt{e})$	↘	1

$h(\sqrt{e})=1+\frac{\ln(\sqrt{e})}{(\sqrt{e})^3}=1+\frac{1}{2(\sqrt{e})^3}\simeq 1{,}11$.

4. h est dérivable et strictement croissante sur $]0;\sqrt{e}]$ à valeurs dans $]-\infty;h(\sqrt{e})]$; 0 appartient à l'intervalle $]-\infty;h(\sqrt{e})]$ donc 0 admet un unique antécédent α appartement à $]0;\sqrt{e}]$.

L'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α appartenant à $]0;\sqrt{e}]$.

h est dérivable et décroissante sur $[\sqrt{e};+\infty[$, $\lim_{x\to+\infty}h(x)=1$ donc $h(x)\geqslant 1$ sur $[\sqrt{e};+\infty[$.

L'équation $h(x)=0$ n'admet pas de solution dans l'intervalle $[\sqrt{e};+\infty[$.

Conclusion

L'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0;+\infty[$.

$h(1)=1>0$ $h(0{,}5)\simeq-1{,}77<0$ donc $0{,}5<\alpha<1$

5. Si $x<\alpha$ alors $h(x)<h(\alpha)=0$
Si $\alpha<x\leqslant\sqrt{e}$ alors $h(\alpha)=0<h(x)$
Si $\sqrt{e}<x$ alors $h(x)\geqslant 1>0$.
On obtient :

x	0		α		+∞
h(x)	‖	–	0	+	

Partie II

1. Pour tout nombre réel appartient à $]0;+\infty[$.
$$f_1(x)-f_2(x)=x-1-\frac{\ln(x)}{x^2}-x+2+\frac{2\ln(x)}{x^2}=1+\frac{\ln(x)}{x^2}=h(x)$$

2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle, on note :
$M_1(x;f_1(x))$ appartenant à $\mathscr{C}_1$.
$M_2(x;f_2(x))$ appartenant à $\mathscr{C}_2$.
$\overrightarrow{M_2M_1}\begin{pmatrix}0\\ f_1(x)-f_2(x)\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{M_2M_1}\begin{pmatrix}0\\ h(x)\end{pmatrix}$
Si $x\in]0;\alpha[$ alors $h(x)<0$ donc M_1 est en dessous de M_2 et $\mathscr{C}_2$ est au dessus de $\mathscr{C}_1$ sur $]0;\alpha[$.
Si $x\in]\alpha;+\infty[$ alors $h(x)>0$ donc M_1 est au dessus de M_2 et $\mathscr{C}_2$ est en dessous de $\mathscr{C}_1$ sur $]\alpha;+\infty[$.
Si $x=\alpha$ alors $h(\alpha)=0=1+\frac{\ln(\alpha)}{\alpha^2}$ donc $\frac{\ln(\alpha)}{\alpha^2}=-1$.
$f_1(\alpha)=\alpha-1-(-1)=\alpha$
$f_2(\alpha)=\alpha-2-2\times(-1)=\alpha$
Les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont sécantes en $M(\alpha;\alpha)$.