Exercice B au choix du candidat 5 points

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A et B.
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.
Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

EXERCICE B

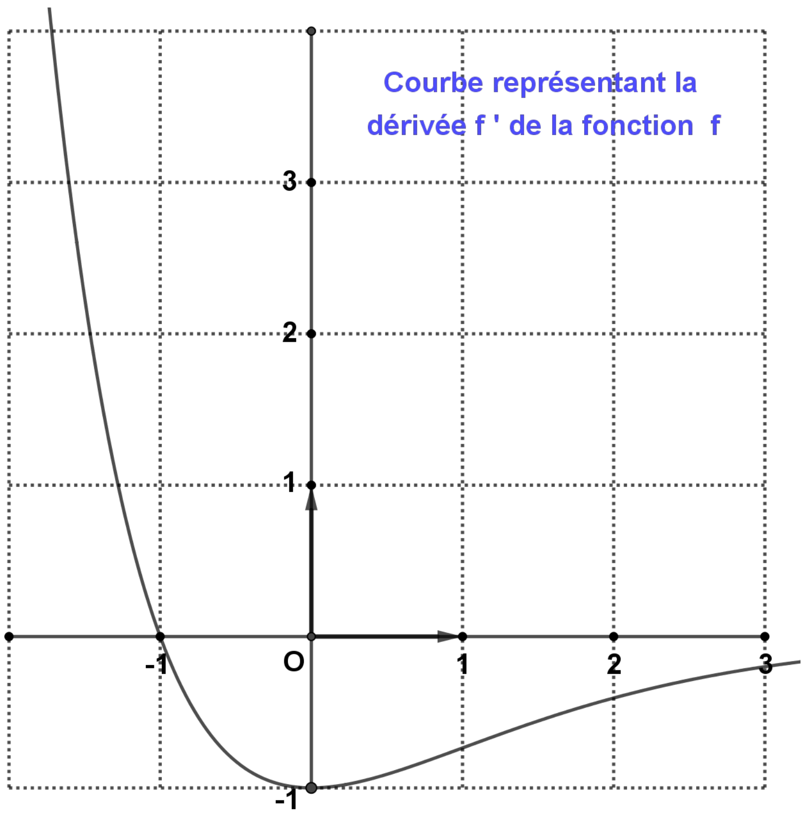
Principaux domaines abordés: **Fonction exponentielle - dérivation - convexité**

Partie I

On donne ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant la **fonction dérivée** f' d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
À l'aide de cette courbe, conjecturer, en justifiant les réponses :

1. Le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. La convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



Partie II

On admet que la fonction f mentionnée dans la **Partie I** est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x+2)e^{-x}$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on note f' et f'' les fonctions dérivées première et seconde de f respectivement.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x, $f(x)=\frac{x}{e^x}+2e^{-x}$.

En déduire la limite de f en $+\infty$.
Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.
On admet que $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

2.a. Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x)=(-x-1)e^{-x}$.

2.b. Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f et dresser son tableau de variations.

2.c. Montrer que l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-2;-1]$ dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.

3. Déterminer, pour tout nombre réel x, l'expression de $f''(x)$ et étudier la convexité de la fonction f.
Que représente pour la courbe $\mathscr{C}$ son point A d'abscisse 0 ?

CORRECTION

Partie I

1. Sur l'intervalle $]-\infty;-1[$ la cour be représentative de f' est au dessus de l'axe des abscisses et sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ la courbe représentative de f' est en dessous de l'axe des abscisses.
Pour $x\in]-\infty;-1[$ $f'(x)>0$ donc f est croissante sur $]-\infty;-1[$ et pour $x\in]-1;+\infty[$ $f'(x)<0$ donc f est décroissante sur $]-1;+\infty[$.

2. f' est décroissante sur $]-\infty;0[$ et croissante sur $]0;+\infty[$ donc sa fonction dérivée : f'' est négative sur $]-\infty;0[$ et positive sur $]0;+\infty[$.
Pour $x\in]-\infty;0[$ $f''(x)<0$ donc f est concave sur $]-\infty;0[$ et pour $x\in]0;+\infty[$ $f''(x)>0$ donc f est convexe sur $]0;+\infty[$.

Partie II

1. Pour tout nombre réel x :
$f(x)=(x+2)e^{-x}=xe^{-x}+2e^{-x}=x\times\frac{1}{e^x}+2e^{-x}=\frac{x}{e^x}+2e^{-x}$.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ et $\lim_{X\to+\infty}\frac{1}{X}=0$ donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$.
$\lim_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$ et $\lim_{X\to-\infty}e^X=0$ donc $\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0$.
donc $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ et la droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

2.a. Pour tout nombre réel x : $f(x)=(x+2)e^{-x}$.
$(e^u)'=u'\times e^u$ $u(x)=-x$ $u'(x)=-1$ $(e^{-x})'=-e^{-x}$.
$(v\times w)'=v'\times w+v\times w'$ $v(x)=x+2$ $v'(x)=1$ $w(x)=e^{-x}$ $w'(x)=-e^{-x}$
$f'(x)=1\times e^{-x}+(x+2)\times(-e^{-x})=e^{-x}-xe^{-x}-2e^{-x}=(-x-1)e^{-x}$.

2.b. Pour tout nombre réel x, $e^{-x}>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $(-x-1)$.
$-x-1=0 \Leftrightarrow x=-1$ $-x-1>0 \Leftrightarrow -1>x$ $-x-1<0 \Leftrightarrow -1<x$
Tableau de variations de f

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f '(x)		+	0	–	
f(x)	$-\infty$	↗	e	↘	0

$f(-1)=1\times e^1=e$ et on admet que $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

2.c. Pour tout nombre réel, $f(x)=(x+2)e^{-x}$.
$f(-2)=0$ $f(-1)=e$
f est dérivable et strictement croissante sur [-2 ;-1] à valeurs dans [0;e].
$2\in[0;e]$ le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que 2 admet un unique antécédent α appartenant à l'intervalle $[-2;-1]$ c'est à dire que l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution α appartient à $[-2;-1]$.
En utilisant la calculatrice : $f(-1,6)\simeq1,98<2$ $f(-1,5)\simeq2,24>2$
Donc $-1,6<\alpha<-1,5$ $\alpha\simeq-1,6$ à 10^{-1} près.

3. $f''(x)=-1\times e^{-x}+(x-1)(-e^{-x})=-e^{-x}+x\,e^{-x}+e^{-x}=x\,e^{-x}$.

Le signe de $f''(x)$ est le signe de x.

Pour tout $x\in]-\infty;0[$ $f''(x)<0$ et f est concave sur $]-\infty;0[$.

Pour tout $x\in]0;+\infty[$ $f''(x)>0$ et f est convexe sur $]0;+\infty[$.

Le point A de $\mathscr{C}$ d'abscisse 0 et un point d'inflexion de $\mathscr{C}$.