Exercice 1 commun à tous les candidats 5 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=10000$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=0,95u_n+200$.

1. Calculer u_1 et vérifier que $u_2=9415$.

2.a. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n : $u_n>4000$.

2.b. On admet que la suite (u_n) est décroissante. Justifier qu'elle converge.

3. Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par : $v_n=u_n-4000$.

3.a. Calculer v_0.

3.b. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à 0,95.

3.c. En déduire que pour tout entier naturel n : $u_n=4000+6000\times 0,95^n$.

3.d. Quelle est la limite de la suite (u_n) ? Justifier la réponse.

4. En 2020, une espèce animale comptait 10000 individus. L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de 5 % chaque début d'année. Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 200 individus à la fin de chaque année, à partir de 2021.
Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : « l'espèce ne devrait pas s'éteindre, mais malheureusement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de la moitié de la population ».
Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifier la réponse.

CORRECTION

1. $u_1=0{,}95\,u_0+200=0{,}95\times 10000+200=9500+200=9700$
$u_2=0{,}95\,u_1+200=0{,}95\times 9700+200=9215+200=9415$

2.a. On veut démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a : $u_n>4000$.

Initialisation

$u_0=10000>400$ donc la propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire, pour tout entier naturel n, on suppose : $u_n>4000$ et on doit démontrer que $u_{n+1}>4000$.

Or $u_{n+1}=0{,}95\,u_n+200$.

$u_n>4000$ donc $0{,}95\,u_n>0{,}95\times 4000=3800$ et $0{,}95\,u_n+200>3800+200=4000$

Conséquence : $u_{n+1}>4000$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a : $u_n>4000$.

2.b. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 4000 donc convergente.

3.a. $v_0=u_0-4000=10000-4000=6000$.

3.b. Pour tout entier naturel n :

$v_n=u_n-4000 \quad \Leftrightarrow \quad u_n=v_n+4000$

$v_{n+1}=u_{n+1}-4000=0{,}95\,u_n+200-4000=0{,}95\times(v_n+4000)-3800=0{,}95\,v_n+0{,}95\times 4000-3800$

$v_{n+1}=0{,}95\,v_n+3800-3800=0{,}95\,v_n$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison : 0,95.

3.c. Pour tout entier naturel n, $v_n=v_0\times q^n 6000\times 0{,}95^n$.

Or $u_n=v_n+4000$ donc $u_n=4000+6000\times 0{,}95^n$

3.d. $0<0{,}95<1$ donc $\lim_{n\to+\infty} 0{,}95^n=0$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n=4000$.

4. Pour tout entier naturel n, on note w_n le nombre d'individus à la fin de l'année (2020+n).

$w_0=10000$

Pour tout entier naturel n, $w_{n+1}=w_n-\dfrac{5}{100}\times w_n+200=(1-0{,}05)w-n+200=0{,}95\,w_n+200$.

Pour tout entier naturel n, $w_n=u_n=4000+6000\times 0{,}95^n$.

$\lim_{n\to+\infty} w_n=4000$.

L'affirmation est juste car pour n assez grand, il y aura un nombre de disparition d'individus supérieur à 5000.