Exercice 2 commun à tous les candidats 5 points

Un test est mis au point pour détecter une maladie dans un pays.
Selon les autorités sanitaires de ce pays, 7 % des habitants sont infectés par cette maladie.
Parmi les individus infectés, 20 % sont déclarés négatifs.
Parmi les individus sains, 1 % sont déclarés positifs.
Une personne est choisie au hasard dans la population.

On note :
. M l'évènement : « la personne est infectée par la maladie » ;
. T l'évènement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.

2.a. Quelle est la probabilité que la personne soit infectée par la maladie et que son test soit positif ?

2.b. Montrer que la probabilité que son test soit positif est de 0,0653.

3. On sait que le test de la personne choisie est positif.
Quelle est la probabilité qu'elle soit infectée ?
On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-2} près.

4. On choisit dix personnes au hasard dans la population.
La taille de cette population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre d'individus ayant un test positif parmi les dix personnes.

4.a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres.

4.b. Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif.
On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-2} près.

5. Déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins une de ces personnes ait un test positif, soit supérieure à 99 %.

CORRECTION

1. 7 % des habitants du pays sont infectés par la maladie donc :

$P(M)=\frac{7}{100}=0{,}07$ et $P(\bar{M})=1-P(M)=1-0{,}07=0{,}93$

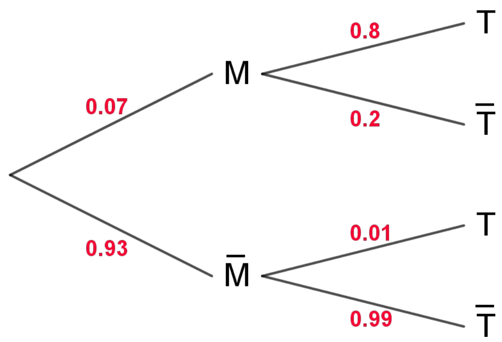
. Parmi les individus infectés, 20 % sont déclarés négatifs donc :

$P_M(\bar{T})=\frac{20}{100}=0{,}2$ et $P_M(T)=1-P_M(\bar{T})=1-0{,}2=0{,}8$,

. Parmi les individus sains, 1 % sont déclarés positifs donc :

$P_{\bar{M}}(T)=\frac{1}{100}=0{,}01$ et $P_{\bar{M}}(\bar{T})=1-P_{\bar{M}}(T)=1-0{,}01=0{,}99$

. Arbre pondéré modélisant la situation proposée



2.a. $P(M\cap T)=P(M)\times P_M(T)=0{,}07\times 0{,}8=0{,}056$

2.b. En utilisant la formule des probabilités totales :

$P(T)=P(M\cap T)+P(\bar{M}\cap T)=0{,}056+P(\bar{M})\times P_{\bar{M}}(T)=0{,}056+0{,}93\times 0{,}01$

$P(T)=0{,}056+0{,}0093=0{,}0653$

3. On nous demande de calculer : $P_T(M)$

$P_T(M)=P\frac{M\cap T}{P(T)}=\frac{0{,}056}{0{,}0653}=\frac{560}{653}=0{,}86$ à 10^{-2} près.

4.a. On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :

On choisit au hasard une personne du pays.

Succès T : « la personne a un test positif » la probabilité de succès est : $p=P(T)=0{,}0653$.

Échec $\bar{T}$: « la personne a un test négatif » la probabilité de l'échec est $q=P(\bar{T})=0{,}9347$.

On choisit successivement dix personnes (on suppose les tirages avec remise et indépendants).

X est la variable aléatoire égale au nombre de succès en dix épreuves.

La loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0{,}0653$.

4.b. $P(X=2)=\binom{10}{2}\,p^2\times q^{10-8}=\binom{10}{2}\,0{,}0653^2\times 0{,}9347^8$

$\binom{10}{2}=\frac{10\times 9}{2}=45$

$P(X=2)=45\times 0{,}0653^2\times 0{,}9347^8=0{,}11$ à 10^{-2} près.

5. n est un entier naturel non nul.

On choisit n personnes au hasard du pays.

Y est la variable aléatoire égale au nombre de personnes ayant un test positif parmi les n personnes.

On considère : $P(Y\geqslant 1)$

$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0)$

$P(Y = 0) = q^n = 0{,}9347^n$

On veut : $1 - 0{,}9347^n \geqslant 0{,}99 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - 0{,}99 \geqslant 0{,}9347^n \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}01 \geqslant 0{,}9347^n$

La fonction $\ln$ est croissante sur $]0\,;+\infty[$

$\Leftrightarrow \quad \ln(0{,}01) \geqslant \ln(0{,}9347^n) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(0{,}01) \geqslant n \times \ln(0{,}9347)$

$0 < 0{,}9347 < 1$ donc $\ln(0{,}9347) < 0$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}9347)} \leqslant n$

$\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}9347)} \simeq 68{,}2$ donc $69 \leqslant n$.

Il faut au minimum tester 69 personnes de ce pays pour que la probabilité qu'au moins une de ces personnes ait un test positif, soit supérieure à 99 %.