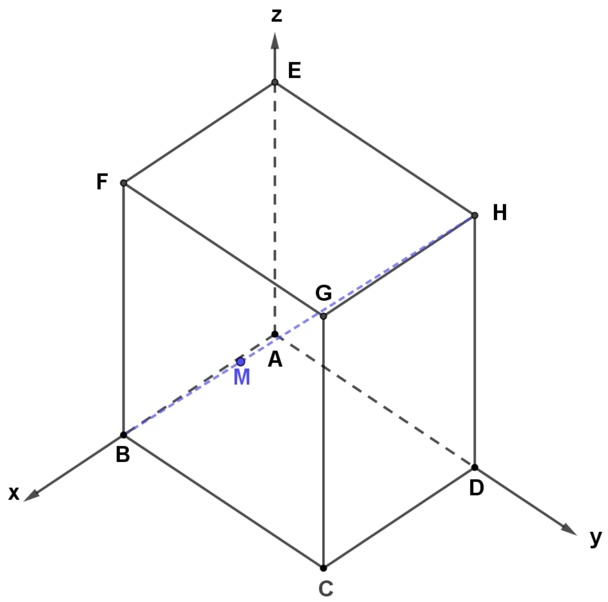
Exercice 3 commun à tous les candidats 5 points

Dans l'espace, on considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur égale à 1.
On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
On considère le point M tel que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BH}$.



1. Par lecture graphique, donner les coordonnées des points B, D, E, G et H.

2.a. Quelle est la nature du triangle EGD ? Justifier la réponse.

2.b. On admet que l'aire d'un triangle équilatéral de côté c est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$.

Montrer que l'aire du triangle EGD est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Démontrer que les coordonnées de M sont $\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$.

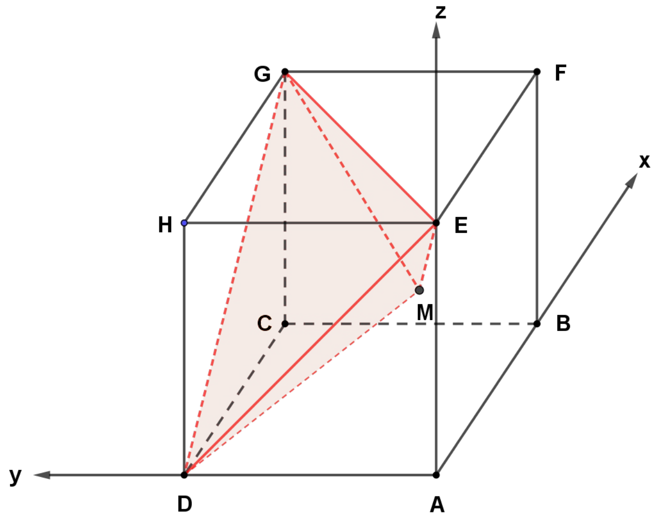
4.a. Justifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (EGD).

4.b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EGD) est : $-x + y + z - 1 = 0$.

4.c. Soit $\mathcal{D}$ la droite orthogonale au plan (EGD) et passant par M.
Montrer qu'une représentation paramétrique de cette droite est :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = \frac{2}{3} - t \\ y = \frac{1}{3} + t \\ z = \frac{1}{3} + t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

5. Le cube ABCDEFGH est représentéci-après selon une vue qui permet mieux percevoir la pyramide GEDM, en rouge sur la figure :



Le but de cete question est de calculer le volume de la pyramide GEDM.

5.a. Soit K, le pied de la hauteur de la pyramide GEDM issue du point M.

Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

5.b. En déduire le volume de la pyramide GEDM.

On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule $V=\frac{b\times h}{3}$ *où b désigne l'aire d'une base et h la hauteur associée.*

CORRECTION

1. B(1;0;0) D(0;1;0) E(0;0;1) G(1;1;1) H(0;1;1)

2.a. [EG], [GD] et [ED] sont des diagonales de carrés faces du cube (de côté de longueur 1) donc :

$EG^2=GD^2=ED^2=1^2+1^2=2 \Leftrightarrow EG=GD=ED=\sqrt{2}$.

Le triangle EGD est un triangle équilatéral.

2.b. L'aire du triangle EGD est égale à : $\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (en unité d'aire)

3. B(1;0;0) M(x;y;z) H(0;1;1) $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-1\\y\\z\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BH} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-1\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x-1=-\frac{1}{3}\\ y=\frac{1}{3}\\ z=\frac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{2}{3}\\ y=\frac{1}{3}\\ z=\frac{1}{3}\end{cases} \quad M\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$$

4.a. E(0;0;1) G(1;1;1) D(0;1;0)

$\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (EGD). $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$\vec{n}.\overrightarrow{EG}=-1\times 1+1\times 1+1\times 0=0$ $\vec{n}.\overrightarrow{ED}=-1\times 0+1\times 1+1\times(-1)=0$

$\vec{n}$ est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires du plan (EGD) donc $\vec{n}$ est un vecteur normal à (EGD).

4.b. $\mathscr{D}$ est la droite passant par le point $M\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ et de vecteur directeur $\vec{n}$ (normal au plan (EGD)

$$\mathscr{D}: \begin{cases}x=\frac{2}{3}-t\\ y=\frac{1}{3}+t\\ z=\frac{1}{3}+t\end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

5.a. K est le point d'intersection du plan (EGD) et de la droite $\mathscr{D}$.

On résout le système : $\begin{cases}-x+y+z-1=0\\ x=\frac{2}{3}-t\\ y=\frac{1}{3}+t\\ z=\frac{1}{3}+t\end{cases}$

$-\left(\frac{2}{3}-t\right)+\frac{1}{3}+t+\frac{1}{3}+t-1=0 \Leftrightarrow 3t-1=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{3}$ donc :

$x=\frac{1}{3}$ $y=\frac{2}{3}$ $z=\frac{2}{3}$ $K\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$

5.b. $\overrightarrow{KM}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ $KM^2=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{3}{9} \Leftrightarrow KM=\frac{\sqrt{3}}{3}$ $V=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}}{2}=\frac{3}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ en unité de volume