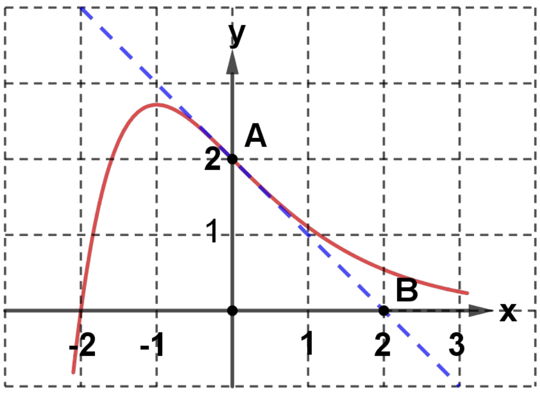
Exercice A au choix du candidat 5 points

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A et B.
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.
Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

Exercice A

Principaux domaines abordés: Fonction exponentielle convexité, dérivation, équations différentielles

Cet exercice est composé de trois parties indépendantes.
On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé, une portion de la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



On considère les points A(0;2) et B(2;0).

Partie 1

Sachant que la courbe $\mathscr{C}$ passe par A et que la droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.
Donner par lecture graphique :

1. La valeur de $f(0)$ et celle de $f'(0)$.

2. Un intervalle sur lequel la fonction f semble convexe.

Partie 2

On note (E) l'équation différentielle $y' = -y + e^{-x}$.
On admet que : $g : x \to xe^{-x}$ est une solution particulière de (E).

1. Donner toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (H) : $y' = -y$.

2. En déduire toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).

3. Sachant que la fonction f est la solution particulière de (E) qui vérifie que $f(0) = 2$.
Déterminer une expression de $f(x)$ en fonction de x.

Partie 3

On admet que pour tout nombre réel x, $f(x)=(x+2)e^{-x}$.

1. On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

1.a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=(-x-1)e^{-x}$.

1.b. Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
On ne précisera ni la limite en $-\infty$ ni la limite de f en $+\infty$.
On calculera la valeur exacte de l'extremum de f sur $\mathbb{R}$.

2. On rappelle que f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f.

2.a. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f''(x)$.

2.b. Peut-on affirmer que f est convexe sur l'intervalle $[0;+\infty[$?

CORRECTION

Partie 1

1. $f(0)=2$ ($\mathscr{C}$ passe par le point A).
$f'(0)=-1$ (coefficient directeur de la droite (AB))

2. $[0;3{,}01]$

Partie 2

1. a est un nombre réel non nul fixé.
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'=a\,y$ sont les fonctions h_λ définies sur $\mathbb{R}$ par :
$h_\lambda(x)=\lambda\, e^{ax}$ (λ est une constante réelle).
Pour l'exercice on a : $h_\lambda(x)=\lambda\, e^{-x}$.

2. g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=x\,e^{-x}$ est une solution de particulière de l'équation différentielle (E) donc
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions f_λ définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f_\lambda(x)=h_\lambda(x)+g(x)=\lambda\, e^{-x}+x\,e^{-x}=(x+\lambda)\,e^{-x}$.

3. $f_\lambda(0)=2=(0+\lambda)\,e^{0}=\lambda$ donc $\lambda=2$.
Pour tout nombre réel x, $f(x)=f_2(x)=(x+2)\,e^{-x}$.

Partie 3

1.a. $(e^{w})'=w'e^{w}$ $\qquad (u\times v)'=u'\times v+u\times v'$
$w(x)=-x$ $\qquad w'(x)=-1$ $\qquad (e^{-x})'=-e^{-x}$
$u(x)=x+2$ $\qquad u'(x)=1$
$v(x)=e^{-x}$ $\qquad v'(x)=-e^{-x}$
$f'(x)=1\times e^{-x}+(x+2)\times(-e^{-x})=(1-x-2)\,e^{-x}=(-x-1)\,e^{-x}$.

1.b. Pour tout nombre réel x, $e^{-x}>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de (-x-1).

$-x-1=0 \iff x=1 \qquad -x-1>0 \iff -1>x \qquad -x-1<0 \iff -1<x$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f '(x)		+	0	–	
f(x)		↗	e	↘	

$f(-1)=1\times e^{1}=e$

2.a. $f'(x)=(-x-1)\,e^{-x}$
$u(x)=-x-1$ $\qquad u'(x)=-1$
$v(x)=e^{-x}$ $\qquad v'(x)=-e^{-x}$
$f''(x)=-1\times e^{-x}+(-x-1)\times(-e^{-x})$
$f''(x)=(-1+x+1)\,e^{-x}=x\,e^{-x}$

2.b. f est une fonction convexe sur tout intervalle où la fonction f'' est positive.
Pour tout nombre réel x, le signe de $f''(x)$ est le signe de x.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f "(x)	$-$	0	$+$
Convexité de f	concave		convexe

On peut donc affirmer que f est convexe sur $[0;+\infty[$.

