Exercice 1 7 points

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thème : Probabilités

Chaque jour où il travaille, Paul doit se rendre à la gare pour rejoindre son lieu de travail en train. Pour cela il prend son vélo deux fois sur trois et s'il ne prend pas son vélo, il prend sa voiture.

1. Lorsqu'il prend son vélo pour rejoindre la gare, Paul ne rate le train qu'une fois sur 50 alors que lorsqu'il prend sa voiture pour rejoindre la gare Paul rate son train une fois sur 10.
On considère une journée au hasard lors de laquelle Paul sera à la gare pour prendre le train qui le conduira au travail.
On note :
. V l'événement « Paul prend son vélo pour rejoindre la gare » ;
. R l'événement « Paul rate son train ».

1.a. Faire un arbre pondéré résumant la situation.

1.b. Montrer que la probabilité que Paul rate son train est égale à $\frac{7}{150}$.

1.c. Paul a raté son train. Déterminer la valeur exacte de la probabilité qu'il ait pris son vélo pour rejoindre la gare.

2. On choisit au hasard un mois pendant lequel Paul s'est rendu 20 jours à la gare pour rejoindre son lieu de travail selon les modalités décrites dans le préambule.
On suppose que, pour chacun, de ces 20 jours, le choix entre vélo et la voiture est indépendant des choix des autres jours.
On nomme X la variable aléatoire donnant le nombre de jours où Paul prend son vélo sur ces 20 jours.

2.a. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres.

2.b. Quelle est la probabilité que Paul prenne son vélo exactement 10 jours sur ces 20 jours pour se rendre à la gare ? On arrondira la probabilité cherchée à 10^{-3}.

2.c. Quelle est la probabilité que Paul prenne son vélo au moins 10 jours sur ces 20 jours pour ce rendre à la gare ? On arrondira la probabilité cherchée à 10^{-3}.

2.d. En moyenne, combien de jours sur une période choisie au hasard de 20 jours Paul prend son vélo pour se rendre à la gare ? On arrondira la réponse à l'entier.

3. Dans le cas où Paul se rend à la gare en voiture, on note T la variable aléatoire donnant le temps de trajet nécessaire pour se rendre à la gare. La durée du trajet est donnée en minutes, arrondie à la minute.
La loi de probabilité de T est donnée par le tableau ci-dessous.

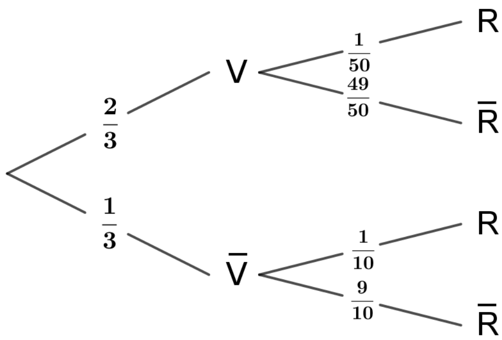
k (en minutes)	10	11	12	13	14	15	16	17	18
P(T=k)	0.14	0.13	0.13	0.12	0.12	0.11	0.10	0.08	0.07

Déterminer l'espérance de la variable T et interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

CORRECTION

1.a. Paul prend son vélo deux fois sur trois donc $P(V)=\frac{2}{3}$ et $P(\bar{V})=1-P(V)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

- Si Paul prend son vélo, il rate le train une fois sur 50 donc $P_V(R)=\frac{1}{50}$ et $P_V(\bar{R})=\frac{49}{50}$.
- Si Paul prend sa voiture, il rate le train une fois sur 10 donc $P_{\bar{V}}(R)=\frac{1}{10}$ et $P_{\bar{V}}(\bar{R})=\frac{9}{10}$.
- On obtient l'arbre pondéré suivant :



1.b. En utilisant la formule des probabilités totales :

$P(R)=P(V\cap R)+P(\bar{V}\cap R)=P(V)\times P_V(R)+P(\bar{V})\times P_{\bar{V}}(R)$

$P(R)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{50}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{10}=\frac{2}{150}+\frac{1}{30}=\frac{2+5}{150}=\frac{7}{150}$

1.c. On nous demande de déterminer $P_R(V)$.

$P_R(V)=\frac{P(V\cap R)}{P(R)}=\frac{2}{150}\times\frac{150}{7}=\frac{2}{7}$

2.a. On considère l'épreuve de Bernoulli :
on choisit au hasard un mois pendant lequel Paul s'est rendu 20 jours à la gare.
Pour un jour quelconque de ces 20 jours :
le succès est $S=V$ Paul a pris son vélo pour aller à la gare
la probabilité de succès est $p=P(V)=\frac{2}{3}$
l'échec est $\bar{S}=\bar{V}$ Paul a pris sa voiture pour aller à la gare
la probabilité de l'échec est $q=P(\bar{V})=\frac{1}{3}$.
On effectue dans le mois 20 épreuves que l'on suppose indépendantes (le choix du vélo ou de la voiture un jour ne dépend pas du choix des autres jours).
X est la variable aléatoire égale au nombre de succès en 20 épreuves.
La loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres $n=20$ et $p=\frac{2}{3}$.

2.b. $P(X=10)=\binom{20}{10}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$.

En utilisant la calculatrice : $P(X=10)=0{,}054$

2.c. $P(X\geqslant 10)=0{,}962$ (en utilisant la calculatrice)

2.d. L'espérance mathématique de X est égale à $np=20\times\frac{2}{3}=\frac{40}{3}\simeq 13{,}33$.

Donc en moyenne, Paul se rendra 13 jours en vélo à la gare par période de 20 jours.

3. $E(T)=10\times1{,}4+11\times0{,}13+12\times0{,}13+13\times0{,}12+14\times0{,}12+15\times0{,}11+16\times0{,}10+17\times0{,}08+18\times0{,}07=13{,}5$
En moyenne, la durée du trajet de Paul en voiture pour se rendre à la gare sera 13,5 minutes.