Exercice 1 — 7 points

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thème: Suites

Dans cet exercice, on considère la suite (T_n) définie par :
$T_0=180$ et, pour tout entier naturel n, $T_{n+1}=0{,}955\,T_n+0{,}9$.

1.a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $T_n\geqslant 20$.

1.b. Vérifier que pour tout entier naturel n, $T_{n+1}-T_n=-0{,}045(T_n-20)$.
En déduire le sens de variation de la suite (T_n) .

1.c. Conclure de ce qui précède que la suite (T_n) est convergente. Justifier.

2. pour tout entier naturel n, on pose $u_n=T_n-20$.

2.a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

2.b. En déduire que pour tout entier naturel n, $T_n=20+160\times 0{,}955^n$.

2.c. Calculer la limite de la suite (T_n) .

2.d. Résoudre l'inéquation $T_n\leqslant 120$ d'inconnue n entier naturel.

3. Dans cette partie, on s'intéresse à l'évolution de la température au centre d'un gâteau après sa sortie du four.
On considère qu'à la sortie du four, la température au centre du gâteau est de 180°C et celle de l'air ambiant est 20°C.
La loi de refroidissement de Newton permet de modéliser la température au centre du gâteau par la suite précédente (T_n) . Plus précisément T_n représente la température au centre du gâteau exprimée en degré Celsius, n minutes après sa sortie du four.

3.a. Expliquer pourquoi la limite de la suite (T_n) déterminée à la question 2.c. était prévisible dans le contexte de l'exercice.

3.b. On considère la fonction python ci-dessous :

```
def temp(x):
  T=180
  n=0
  while T>x:
    T=0.955*T+0.9
    n=n+1
  return n
```

Donner le résultat obtenu en, exécutant temp(120). Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

CORRECTION

1.a. $T_0=180$ et pour tout entier naturel n, $T_{n+1}=0{,}955T_n+0{,}9$.

On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n, $T_n\geqslant 20$.

Initialisation

$T_0=180\geqslant 20$ la propriété est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $T_n\geqslant 20$ et on doit démontrer que $T_{n+1}\geqslant 20$.

Or, $T_n\geqslant 20 \Leftrightarrow 0{,}955\times T_n\geqslant 0{,}955\times 20=19{,}1 \Leftrightarrow 0{,}955\times T_n+0{,}9\geqslant 19{,}1+0{,}9=20 \Leftrightarrow T_{n+1}\geqslant 20$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout naturel n, $T_n\geqslant 20$.

1.b. Pour tout entier naturel n ;

$$T_{n+1}-T_n=0{,}955\times T_n+0{,}9-T_n=(0{,}955-1)\times T_n+0{,}9=-0{,}045\times T_n+0{,}9=-0{,}045\times\left(T_n-\frac{0{,}9}{0{,}045}\right)$$

$T_{n+1}-T_n=-0{,}045(T_n-20)$

Pour tout entier naturel n, $T_n-20\geqslant 0$ donc $T_{n+1}-T_n\leqslant 0$ et la suite (T_n) est décroissante.

1.c. La suite (T_n) est décroissante et minorée par 20 donc la suite (T_n) est convergente.

2.a. Pour tout entier natyrel n, on pose $u_n=T_n-20 \Leftrightarrow T_n=u_n+20$.

$u_{n+1}=T_{n+1}-20=0{,}955T_n+0{,}9-20=0{,}955(u_n+20)-19{,}1=0{,}955u_n+0{,}955\times 20-19{,}1$

$u_{n+1}=0{,}955u_n+19{,}1-19{,}1=0{,}955u_n$.

(u_n) est une suite géométrique de raison 0,955.

2.b. $T_0=180 \qquad u_0=T_0-20=180-20=160$

Pour tout entier naturel n, $u_n=u_0\times q^n=160\times 0{,}955^n$ et $T_n=u_n+20$ donc $T_n=20+160\times 0{,}955^n$.

2.c. $0\leqslant 0{,}955<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}0{,}955^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n=20$.

2.d. $T_n\leqslant 120 \Leftrightarrow 20+160\times 0{,}955^n\leqslant 120 \Leftrightarrow 160\times 0{,}955^n\leqslant 100 \Leftrightarrow 0{,}955^n\leqslant\frac{10}{16}=\frac{5}{8}=0{,}625$

ln est croissante sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow \ln(0{,}955^n)\leqslant\ln(0{,}625) \Leftrightarrow n\times\ln(0{,}955)\leqslant\ln(0{,}625)$

$0<0{,}955<1$ donc $\ln(0{,}955)<0$

$\Leftrightarrow n\geqslant\frac{\ln(0{,}625)}{\ln(0{,}955)}\simeq 10{,}21$

n est un entier naturel donc $n\geqslant 11$.

3.a. Le gâteau refroidit jusqu'à la température ambiante : 20°.

20 est la limite de la suite (T_n).

3.b. En exécutant le programme, on obtient $n=11$.

Au bout de 11 minutes la température au centre du gâteau sera inférieure à 120°.