Exercice 3 7 points

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thème: géométrie dans l'espace

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i};\vec{j};\vec{k})$ d'unité 1cm, on considère les points suivants :
$J(2:0;1)$ $K(1;2;1)$ $L(-2;-2;-2)$

1.a. Montrer que le triangle JKL est rectangle en J.
1.b. Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle JKL en cm^2 .
1.c. Déterminer une valeur approchée au dixième près de l'angle géométrique $\widehat{JKL}$

2.a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (JKL).
2.b. En déduire une équation cartésienne du plan (JKL).

Dans la suite, T désigne le point de coordonnées (10;9 ;-6).

3.a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ orthogonale au plan (JKL) et passant par T.
3.b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point T sur le plan (JKL).
3.c. On rappelle que le volume V du tétraèdre est donné par la formule :

$V=\frac{1}{3}B\times h$ où B esl l'aire d'une base et h la hauteur correspondante.

Calculer la valeur exacte du volume du tétraèdre JKLT en cm^3 .

CORRECTION

1.a. $\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{JL}\begin{pmatrix}-4\\-2\\-3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{JK}.\overrightarrow{JL}=(-1)\times(-4)+2\times(-2)+0\times(-3)=4-4=0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JL}$ sont orthogonaux donc le triangle JKL est rectangle en J.

1.b. L'aire du triangle JKL est égale à : $A=\frac{1}{2}\times JK\times JL$.

$JK^2=(-1)^2+2^2+0^2=1+4=5$ $JK=\sqrt{5}$

$JL^2=(-4)^2+(-2)^2+(-3)^2=16+4+9=29$ $JL=\sqrt{29}$

$A=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{29}=\frac{\sqrt{145}}{2}$ cm^2

1.c. En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle JKL rectangle en J.

$KL^2=JL^2+JK^2=5+29=34$ $KL=\sqrt{34}$

$\sin(\widehat{JKL})=\frac{LJ}{KL}=\sqrt{\frac{29}{34}}$

En utilisant la calculatrice, on obtient : $\widehat{JKL}\simeq 67{,}5^\circ$.

2.a. $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (JKL) si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires du plan (JKL). $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JL}$ sont 2 vecteurs du plan (JKL) non nuls et orthogonaux donc ces 2 vecteurs ne sont pas colinéaires.

$\vec{n}.\overrightarrow{JK}=6\times(-1)+3\times 2-10\times 0=-6+6=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{JL}=6\times(-4)+3\times(-2)-10\times(-3)=-24-6+30=0$

$\vec{n}$ est orthogonal aux 2 vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JL}$ donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (JKL).

2.b. $M(x;y;z)$ $\overrightarrow{JM}\begin{pmatrix}x-2\\y-0\\z-1\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}6\\3\\-10\end{pmatrix}$

$M(x;y;z)\in(JKL)\Leftrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{JM}=0 \Leftrightarrow 6\times(x-2)+3\times y-10\times(z-1)=0$

$\Leftrightarrow 6x-12+3y-10z+10=0 \Leftrightarrow 6x+3y-10z+10=0$

3.a. (Δ) est la droite passant par T et de vecteur directeur : $\vec{n}$.

$$(\Delta)\begin{cases}x=6t+10\\y=3t+9\\z=-10t-6\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$$

3.b. On résout le système $\begin{cases}6x+3y-10z-2=0\\x=6t+10\\y=3t+9\\z=-10t-6\end{cases}$

On obtient : $6\times(6t+10)+3\times(3t+9)-10\times(-10t-6)-2=0$

$\Leftrightarrow 36t+60+9t+27+100t+60-2=0 \Leftrightarrow 145t+145=0 \Leftrightarrow t=-\frac{145}{145}=-1$

$x=-6+10=4$ $y=-3+9=6$ $z=10-6=4$ $H(4;6;4)$

3.c. $V=\frac{1}{3}\times B\times h$ $B=A=\frac{\sqrt{145}}{2}$ $h=TH$ $T(10;9;-6)$ $H(4;6;4)$

$TH^2=(-6)^2+(-3)^2+(10)^2=36+9+100=145$ $TH=\sqrt{145}$

$V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{145}}{2}\times\sqrt{145}=\frac{145}{6}$ cm^3