Exercice 1 7 points

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thème: fonction exponentielle

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse.

1. **Affirmation 1 :** Pour tout réel x, $1-\frac{1-e^x}{1+e^x}=\frac{2}{1+e^{-x}}$.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$.

   Affirmation 2 : L'équation $g(x)=\frac{1}{2}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2e^{-x}$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
   Affirmation 3 : L'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathscr{C}$ en un seul point.

4. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=e^x(1-x^2)$.
   Affirmation 4 : Dans le plan muni d'un repère orthonormé la courbe représentative de la fonction h n'admet pas de point d'inflexion.

5. **Affirmation 5 :** $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+x}=0$

6. **Affirmation 6 :** Pour tout nombre réel x, $1+e^{2x}\geqslant 2e^x$.

CORRECTION

1. Affirmation 1 : **VRAIE**

Preuve

Pour tout nombre réel x.

$$\frac{1-e^x}{1+e^x}=\frac{1+e^x-(1-e^x)}{1+e^x}=\frac{2e^x}{1+e^x}=\frac{e^{-x}\times(2e^x)}{e^{-x}\times(1+e^x)}=\frac{2e^{-x}\times e^x}{e^{-x}+e^{-x}\times e^x}=\frac{2\times 1}{e^{-x}+1}=\frac{2}{1+e^{-x}}$$

2. Affirmation 2 : **VRAIE**

Preuve

$$g(x)=\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad 2e^x=e^x+1 \quad e^x=1 \quad\Leftrightarrow x=\ln(1)=0$$

Remarque

On peut aussi démontrer que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ et utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

3. Affirmation 3 : **VRAIE**

Preuve

$f(x)=x^2e^{-x}$ Le coefficient directeur de l'axe des abscisses est égal à 0.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ $\quad (x^2)'=2x \quad (e^{-x})'=-e^{-x}$

$f'(x)=2xe^{-x}+x^2(-e^{-x})=(2x-x^2)e^{-x}$

$f'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2x-x^2=0 \quad\Leftrightarrow x(2-x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x=0 \text{ ou } x=2)$.

Pour $x=0$ alors $f(0)=0$ donc l'axe des abscisses est tangent à $\mathscr{C}$ à l'origine.

Pour $x=2$ alors $f(2)=4e^{-2}\neq 0$ donc la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 n'est pas l'axe des abscisses.

4. Affirmation 4 : **FAUSSE**

Preuve

Pour tout nombre réel x, $h(x)=e^x(1-x^2)$.

$(e^x)'=e^x \quad (1-x^2)'=-2x$

$h'(x)=e^x(1-x^2)+e^x(-2x)=e^x(1-x^2-2x)$

$(x^2-2x+1)'=-2x-2$

$h''(x)=e^x(-x^2-2x+1)+e^x(-2x-2)=e^x(-x^2-4x-1)$

Pour tout nombre réel x, $e^x>0$ donc le signe de $h''(x)$ est le signe du trinôme $T(x)=-x^2-4x-1$.

$\Delta=16-4=12=(2\sqrt{3})^2 \qquad x_1=\frac{4-2\sqrt{3}}{-2}=-2+\sqrt{3} \qquad x_2=\frac{4+2\sqrt{3}}{-2}=-2-\sqrt{3}$

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
h"(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	

h'' est nulle en changeant de signe, deux fois, donc la courbe $\mathscr{C}$ admet deux points d'inflexion.

5. Affirmation 5 : **FAUSSE**

Preuve

$$\frac{e^x}{e^x+x}=\frac{e^x}{e^x}\times\frac{1}{1+\frac{x}{e^x}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ (résultat de cours) et $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{1}{X}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$.

Conséquence :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x+e^x}=1 \neq 0$$

6. Affirmation 6 : VRAIE

Preuve

Remarque :

$1+e^{2x}\geqslant 2e^x \quad\Leftrightarrow\quad 1+e^{2x}-2e^x\geqslant 0$

Or $1+e^{2x}-2e^x=(e^x)^2-2e^x+1=(e^x-1)^2\geqslant 0$