Exercice 1 7 points

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thèmes: probabilités; suites

Dans une région touristique, une société propose un service de location de vélos pour la journée.
La société dispose de deux points de location distincts, le point A et le point B. Les vélos peuvent être empruntés et restitués indifféremment dans l'un l'un ou l'autre des deux points de location.

D'après une étude statistique :

. Si le vélo se trouve au point A un matin, la probabilité qu'il se trouve au point A le matin suivant est égale à 0,84.
. Si le vélo se trouve au point B un matin, la probabilité qu'il se trouve au point B le matin suivant est égale à 0,76.

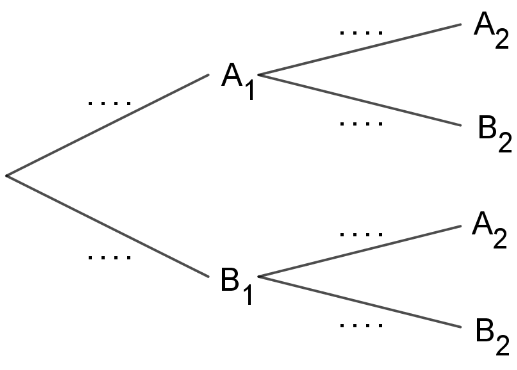
À l'ouverture du service le premier matin, la société a disposé la moitié de ses vélos au point A, l'autre moitié au point B.
On considère un vélo de la société pris au hasard.

Pour tout entier naturel non nul n, on définit les événements suivants :

. A_n : « le vélo se trouve au point A le $n^{ième}$ matin »
. B_n : « le vélo se trouve au point B le $n^{ième}$ matin ».

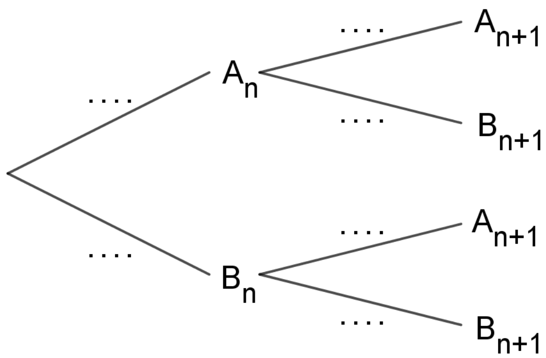
Pour tout entier naturel non nul n, on note a_n la probabilité de l'événement A_n et b_n la probabilité de l'événement B_n . Ainsi $a_1=0,5$ et $b_1=0,5$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premiers matins :



2.a. Calculer a_2 .
2.b. Le vélo se trouve au point A le deuxième matin, calculer la probabilité qu'il se soit trouvé au point B le premier matin, la probabilité sera arrondie au millième.

3.a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-après qui modélise la situation pour les $n^{ième}$ et $(n+1)^{ième}$ matins :



3.b. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $a_{n+1}=0,6\,a_n+0,24$.

4. Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel non nul n, $a_n=0,6-0,1\times 0,6^{n-1}$.

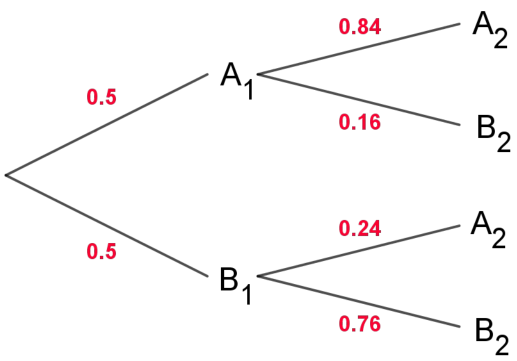
5. Déterminer la limite de la suite (a_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

6. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n\geqslant 0,599$ et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

CORRECTION

1. À l'ouverture du service le premier matin, la société a disposé la moitié de ses vélos au point A l'autre moitié au point B donc ; $P(A_1)=a_1=0,5$ et $P(B_1)=b_1=0,5$.

- Si un vélo se trouve au point A un matin, la probabilité qu'il se trouve au point A le matin suivant est égale à : $0,84$ donc $P_{A_1}(A_2)=0,84$ et $P_{A_1}(B_2)=1-P_{A_1}(A_2)=1-0,84=0,16$ car $B_2=\overline{A}_2$.
- Si un vélo se trouve au point B un matin, la probabilité qu'il se trouve au point B le matin suivant est égale à : $0,76$ donc $P_{B_1}(B_2)=0,76$ et $P_{B_1}(A_2)=1-P_{B_1}(B_2)=1-0,76=0,24$.
- On obtient l'arbre pondéré suivant :



2.a. $a_2=P(A_2)$.

En utilisant la formule des probabilités totales

$P(A_2)=P(A_1\cap A_2)+P(B_1\cap A_2)=P(A_1)\times P_{A_1}(A_2)+P(B_1)\times P_{B_1}(A_2)=0,5\times 0,84+0,5\times 0,24$

$P(A_2)=0,42+0,12=0,54$

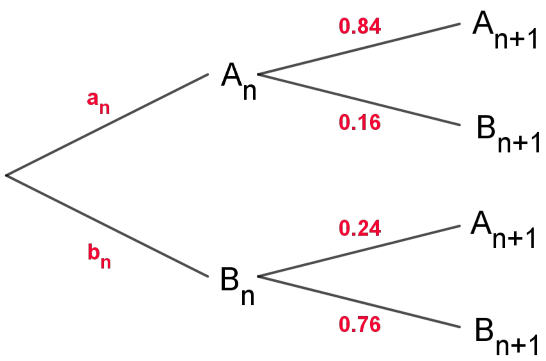
2.b. On nous demande de calculer $P_{A_2}(B_1)$.

$P_{A_2}(B_1)=\dfrac{P(B_1\cap B_1)}{P(A_2)}=\dfrac{0,1}{0,54}=\dfrac{12}{54}=\dfrac{2}{9}\simeq 0,222$ valeur arrondie au millième.

3.a. $P(A_n)=a_n$ $P(B_n)=b_n$ et $a_n+b_n=1$ car $B_n=\overline{A}_n$

$P_{A_n}(A_{n+1})=0,84$ $P_{A_n}(B_{n+1})=0,16$ $P_{B_n}(A_{n+1})=0,24$ $P_{B_n}(A_{n+1})=0,76$

On obtient l'arbre pondéré suivant :



3.b. $a_{n+1}=P(A_n\cap A_{n+1})+P(B_n\cap B_{n+1})=P(A_n)\times P_{A_n}(A_{n+1})+P(B_n)\times P_{B_n}(A_{n+1})=a_n\times 0,84+b_n\times 0,24$

Or $b_n=1-a_n$

$a_{n+1}=0,84\,a_n+0,24\times(1-a_n)=0,84\,a_n+0,24-0,24\,a_n=0,6\,a_n+0,24$.

4. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $a_n=0,66-0,1\times 0,6^{n-1}$.

<u>Initialisation</u>

$a_1=0,5$ et $0,6-0,1\times 0,6^{1-1}=0,6-0,1\times 0,6^0=0,6-0,1\times 1=0,5$;

La propriété est vérifiée pour $n=1$.

Héréditaire

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel non nul n, on suppose que $a_n = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1}$ et on doit démontrer que $a_{n+1} = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^n$.

Or $a_{n+1} = 0{,}6\,a_n + 0{,}24 = 0{,}6 \times (0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1}) + 0{,}24 = 0{,}36 - 0{,}1 \times 0{,}6^n + 0{,}24 = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^n$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel non nul n, $a_n = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1}$.

5. $0 < 0{,}6 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}6^{n-1} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0{,}6$.

6. $a_n \geqslant 0{,}599 \Leftrightarrow 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1} \geqslant 0{,}599 \Leftrightarrow 0{,}6 - 0{,}599 \geqslant 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1} \Leftrightarrow \dfrac{0{,}001}{0{,}1} \geqslant 0{,}6^{n-1}$

$\Leftrightarrow 0{,}01 \geqslant 0{,}6^{n-1}$.

La fonction ln est croissante sur $]0\,;+\infty[$.

$\Leftrightarrow \ln(0{,}01) \geqslant \ln(0{,}6^{n-1}) \Leftrightarrow \ln(0{,}01) \geqslant (n-1) \times \ln(0{,}6)$

$0 < 0{,}6 < 1$ donc $\ln(0{,}6) < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}6)} \leqslant n - 1 \Leftrightarrow \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}6)} + 1 \leqslant n$.

En utilisant la calculatrice $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}6)} \simeq 9{,}016$ à 10^{-3} près et n est un entier naturel.

$\Leftrightarrow 11 \leqslant n$.

Le plus petit entier naturel n tel que $a_n \geqslant 0{,}599$ est 11.

La probabilité que le vélo se trouve au point A est supérieure à 0,599 pour la première fois au 11ème jour.