Exercice 2 — 7 points

Le sujet propose 4 exercices.
*Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et **ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thème: fonctions, fonction exponentielle

Partie A

Soit p la foction définie sur [-3;4] par : $\mathrm{p}(x)=x^3-3x^2+5x+1$.

1. Déterminer les variations de la fonction p sur l'intervalle [-3;4].

2. Justifier que l'équation $\mathrm{p}(x)=0$ admet une unique solution qui sera notée α .

3. Déterminer une valeur approchée de α au dixième près.

4. Donner le tableau de signes de la fonction p sur l'intervalle [-3;4].

Partie B

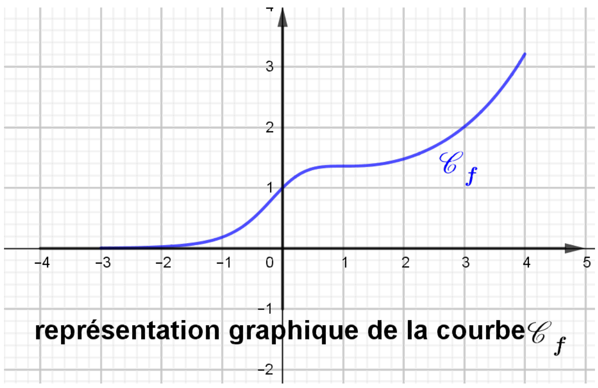
Soit f la fonction définie sur l'intervalle [-3;4] par : $\mathrm{f}(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x^2}$.

On note $\mathscr{C}_{\mathrm{f}}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

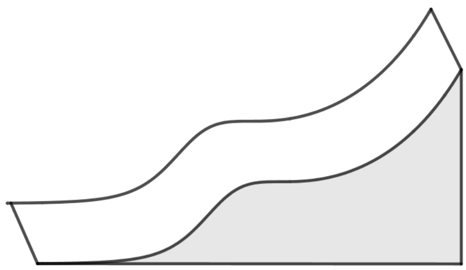
1.a. Déterminer la fonction dérivée de la fonction de la fonction f sur l'intervalle [-3;4].

1.b. Justifier que la courbe $\mathscr{C}_{\mathrm{f}}$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

2. Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe $\mathscr{C}_{\mathrm{f}}$ comme profil du toboggan.
Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.



représentation graphique de la courbe $\mathscr{C}_f$


vue de profil du tobogan

2.a. D'après le graphique ci-dessus, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ? Argumenter.

2.b. On admet que la fonction f'' , dérivée seconde de la fonction f, a pour expression pour tout nombre réel de l'intervalle [-3;4] : $\mathrm{f}''(x)=\dfrac{\mathrm{p}(x)(x-1)\mathrm{e}^x}{(1+x^2)^3}$ où p est la fonction définie dans la partie A.
En utilisant l'expression précédente de f'' , répondre à la question : « le toboggan assure-t-il de bonnes sensations ? ». Justifier.

CORRECTION

Partie A

1. $\mathrm{p}(x)=x^3-3x^2+5x+1 \qquad x\in[-3;4]$
p est dérivable sur [-3;4].
$\mathrm{p}'(x)=3x^2-6x+5$
$\Delta=(-6)^2-4\times3\times5=36-60=-24<0$
Le coefficient de x^2 est strictement positif, donc pour tout nombre réel x de l'intervalle [-3;4], $\mathrm{p}'(x)>0$.
p est strictement croissante sur [-3;4].

2. $\mathrm{p}(-3)=-27-3\times9-3\times5+1=-68<0 \qquad \mathrm{p}(4)=64-3\times16+5\times4+1=37>0$
p est une fonction continue et strictement croissante sur [-3;4], à valeurs dans [-68;37], $0\in[-68;37]$.
Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que 0 admet un unique antécédent α appartenant à [-3;4] c'est à dire que l'équation $\mathrm{p}(x)=0$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle [-3;4].

3. On a $\mathrm{p}(0)=1>0$ et $\mathrm{p}(-1)=-8<0$ donc $-1<\alpha<0$.
En utilisant la calculatrice, on obtient : $-0{,}2<\alpha<-0{,}1$.
$\alpha\simeq-0{,}2$ à 10^{-1} près.

4. Si $-3\leqslant x<\alpha$ alors $\mathrm{p}(-3)\leqslant\mathrm{p}(x)<\mathrm{p}(\alpha) \Leftrightarrow -68\leqslant\mathrm{p}(x)<0$
Si $\alpha<x\leqslant4$ alors $\mathrm{p}(\alpha)<\mathrm{p}(x)\leqslant\mathrm{p}(4) \Leftrightarrow 0<\mathrm{p}(x)\leqslant37$
On donne le signe de $\mathrm{p}(x)$ sous la forme d'un tableau.

x	-∞		α		+∞
p(x)		−	0	+	

Partie B

1.a. $\mathrm{f}(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x^2} \qquad x\in[-3;4]$

$\left(\dfrac{\mathrm{u}}{\mathrm{v}}\right)'=\dfrac{\mathrm{u}'\times\mathrm{v}\times\mathrm{u}\times\mathrm{v}'}{\mathrm{v}^2}$

$\mathrm{u}(x)=\mathrm{e}^x \qquad \mathrm{u}'(x)=\mathrm{e}^x \qquad \mathrm{v}(x)=1+x^2 \qquad \mathrm{v}'(x)=2x$

$$\mathrm{f}'(x)=\frac{\mathrm{e}^x\times(1+x^2)-\mathrm{e}^x\times2x}{(1+x^2)^2}=\frac{\mathrm{e}^x(1+x^2-2x)}{(1+x^2)^2}=\frac{(x-1)^2\mathrm{e}^x}{(1+x^2)^2}$$

1.b. Si $x=1$ alors $\mathrm{f}'(1)=0$ donc la courbe représentative de f admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

2.a. Par lecture graphique : la courbe représentative de p est convexe sur $[x_0;4]$ $x_0\simeq1$ et concave sur $[x_1;x_0]$ $x_1\simeq-0{,}25$ et convexe sur $[-3;x_1]$ donc la courbe représentative de p admet deux points d'inflexion d'abscisses x_0 et x_1.

2.b. $\mathrm{f}''(x)=\dfrac{\mathrm{p}(x)(x-1)\mathrm{e}^x}{(1+x^2)^3}$

Pour tout nombre réel x de l'intervalle [-3;4], $\mathrm{e}^x>0$ et $(1+x^2)^3>0$ donc le signe de $\mathrm{f}''(x)$ est le signe $\mathrm{p}(x)(x-1)$.

$\alpha \simeq -0{,}2 \quad \alpha \in [-3;4]$ et $\alpha < 1$

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
p(x)		−	0		+		
x-1			−		0	+	
f''(x)		+	0	−	0	+	

La courbe représentative de p admet deux points d'inflexion d'abscisses α et 1 donc le toboggan assure de bonnes sensations.