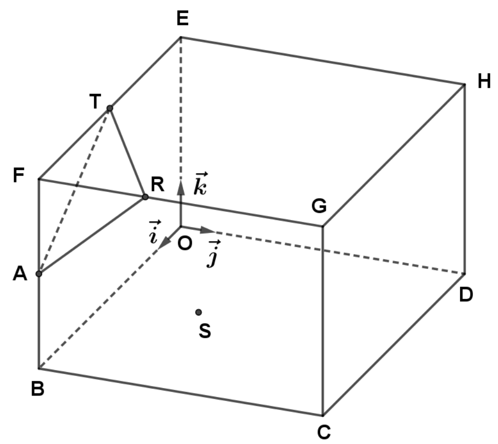
Exercice 1 *7 points*

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thème: géométrie de l'espace

Une exposition d'art contemporain a lieu dans une salle en forme de pavé droit de largeur 6m, de longueur 8m et de hauteur 4m.
Elle est représentée par un parallélépipède rectangle OBCDEFGH où OB= 6m, OD= 8m et OE= 4m.
On utilise le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ tel que $\vec{i}=\frac{1}{6}\overrightarrow{OB}$; $\vec{j}=\frac{1}{8}\overrightarrow{OD}$ et $\vec{k}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OE}$.



Dans ce repère on a, en particulier $C(6;8;0)$; $F(6;0;4)$ et $G(6;8;4)$.
Une des œuvres exposées est un triangle de verre par un triangle ART) qui a pour sommets $A(6;0;2)$, $R(6;3;4)$ et $T(3;0;4)$. Enfin, S est le point de coordonnées $\left(3;\frac{5}{2};0\right)$.

1.a. Vérifier que le triangle ART est isocèle en A.
1.b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AR}.\overrightarrow{AT}$.
1.c. En déduire une valeur approchée à 0,1 degré près l'angle $\widehat{RAT}$.

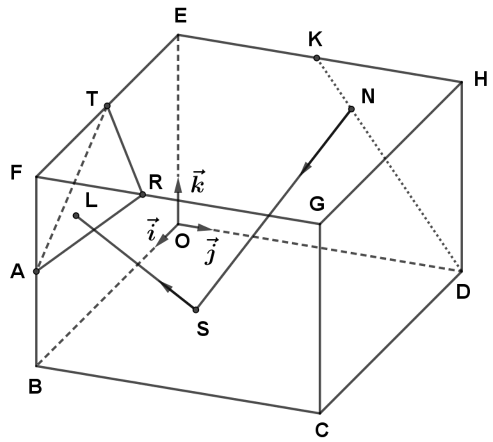
2.a. Justifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ART).
2.b. En déduire une équation cartésienne du plan (ART).

3. Un rayon laser dirigé vers le triangle ART est émis du plancher à partir du point S. On admet que ce rayon est orthogonal au plan (ART).
3.a. Soit Δ la droite orthogonale au plan (ART) en passant par le point S.
Justifier que le système ci-dessus est une représentation paramétrique de la droite Δ :

$$\begin{cases} x= 3+2k \\ y=\frac{5}{2}-2k \\ z= 3k \end{cases} \quad \text{avec } k\in\mathbb{R}$$

3.b. Soit L le point d'intersection de la droite Δ avec le plan (ART).
Démontrer que L a pour coordonnées : $\left(5;\frac{1}{2};3\right)$.

4. L'artiste installe un rail représenté par le segment [DK] où K est le milieu de [EH].
Sur ce rail, il positionne une source lumineuse, en un point N du segment [DK] et il oriente ce second laser vers le point S.



4.a. Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle [0;1], le point N de coordonnées $(0;8-4t;4t)$ est un point du segment [DK].

4.b. Calculer les coordonnées exactes du point N tel que les rayons laser représentés par les segments [SL] et [SN] soient perpendiculaires.

CORRECTION

1.a. $A(6;0;2)$ $R(6;3;4)$ $T(3;0;4)$

$AR^2=(6-6)^2+(3-0)^2+(4-2)^2=9+4=13 \Leftrightarrow AR=\sqrt{13}$

$AT^2=(3-6)^2+(3-0)^2+(4-0)^2=9+4=13 \Leftrightarrow AT=\sqrt{13}$

$AR=AT$ et le triangle ART est isocèle en A.

1.a. $\overrightarrow{AR}\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AT}\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AR}.\overrightarrow{AT}=0\times(-3)+3\times0+2\times2=4$

1.c. $\overrightarrow{AR}.\overrightarrow{AT}=AR\times AT\times\cos(\widehat{RAT}) \Leftrightarrow 4=\sqrt{13}\times\sqrt{13}\times\cos(\widehat{RAT}) \Leftrightarrow \cos(\widehat{RAT})=\frac{4}{13}$

En utilisant la calculatrice : $\widehat{RAT}=72{,}1^\circ$ à 10^{-1} près.

2.a. Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ART) si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ART) par exemples $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{AT}$.

$\vec{n}.\overrightarrow{AR}=2\times0-2\times3+3\times2=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{AT}=2\times(-3)-2\times0+3\times2=0$

donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ART).

2.b. $M(x;y;z)$ $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-6\\y-0\\z-2\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$

$M\in(ART) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n}=0 \Leftrightarrow (x-6)\times2+y\times(-2)+(z-2)+3=0 \Leftrightarrow 2x-12-2y+3z-6=0$
$\Leftrightarrow 2x-2y+3z-18=0$

3.a. Δ est la droite passant par $S\left(3;\frac{5}{2};0\right)$ et de vecteur directeur $\vec{n}$.

M(x;y;z) $\overrightarrow{SM}\begin{pmatrix}x-3\\y-\frac{5}{2}\\z-0\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$

$M\in\Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{SM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires c'est à dire si et seulement si $\overrightarrow{SM}=k\vec{n}$ avec $k\in\mathbb{R}$.

$$\Delta:\begin{cases}x-3=2k\\y-\frac{5}{2}=-2k\\z-0=3k\end{cases} k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta\begin{cases}x=3+2k\\y=\frac{5}{2}-2k\\z=3k\end{cases} k\in\mathbb{R}$$

3.b. On résout le système :

$$\begin{cases}2x-2y+3z-18=0\\x=3+2k\\y=\frac{5}{2}-2k\\z=3k\end{cases}$$

On obtient : $2\times(3+2k)-2\times\left(\frac{5}{2}-2k\right)+3\times(3k)-18=0 \Leftrightarrow 6+4k-5+4k+9k-18=0 \Leftrightarrow k=1$

$x=3+2\times1=5;\ y=\frac{5}{2}-2\times1=\frac{1}{2};\ z=3\times1=3$ $L\left(5;\frac{1}{2};3\right)$

4.a. $D(0;8;0)$ K est le milieu [EH] $K(0;4;4)$ $\overrightarrow{DK}\begin{pmatrix}0\\-4\\4\end{pmatrix}$.

$N\in[DK]$ si et seulement s'il existe $t\in[0;1]$ tel que $\overrightarrow{DN}=t\overrightarrow{DK}$;

$N(x;y;z)$ $\overrightarrow{DN}\begin{pmatrix}x\\y-8\\z\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DN}=t\overrightarrow{DK} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\times t\\y-8=-4t\\z=4t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=8-4t\\z=4t\end{cases}$

$N(0;8-4t;4t)$ $t\in[0;1]$

4.b. $S\left(3;\frac{5}{2};0\right)$ $L\left(5;\frac{1}{2};3\right)$ $N(0;8-4t;4t)$

$\overrightarrow{SL}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{SN}\begin{pmatrix}-3\\\frac{11}{2}-4t\\4t\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{SL}.\overrightarrow{SN}=2\times(-3)-2\times\left(\frac{11}{2}-4t\right)+3\times4t=-6-11+8t+12t=-17+20t$

$\overrightarrow{SL}.\overrightarrow{SN}=0 \Leftrightarrow -17+20t=0 \Leftrightarrow t=\frac{17}{20}$ $\left(\frac{17}{20}\in[0;1]\right)$

$N\left(0;8-\frac{17}{5};\frac{17}{5}\right) \Leftrightarrow N\left(0;\frac{23}{5};\frac{17}{5}\right)$

Les segments [SL] et [SN] sont perpendiculaires.