## Exercice 4 7 points

*Le sujet propose 4 exercices.*
*Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et **ne doit traiter que ces 3 exercices.***
*Chaque exercice est noté sur 7 points ( le total sera ramené sur 20).*
*Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.*

**Thèmes: fonction logarithme népérien - probabilités**

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM) qui comprend six questions.Les six questions sont indépendantes. Pour chacune des questions, **une seule des quatre réponses est exacte.** Le candidat indique sur sa copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse exacte.*
*Aucune justification n'est demandée.*
*Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.*

**Question 1**

Le réel a est définie par : $a=\ln(9)+\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\ln\left(\frac{1}{9}\right)$ est égal à :

**a.** $1-\frac{1}{2}\ln(3)$ **b.** $\frac{1}{2}\ln(3)$ **c.** $3\ln(3)+\frac{1}{2}$ **d.** $-\frac{1}{2}\ln(3)$

**Question 2**

On note (E) l'équation suivante : $\ln x+\ln(x-10)=\ln 3+\ln 7$ d'inconnue le réel x.

**a.** 3 est solution de (E)
**b.** $5-\sqrt{46}$ est solution de (E)
**c.** L'équation (E) admet une unique solution réelle
**d.** L'équation (E) admet deux solutions réelles

**Question 3**

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par l'expression $f(x)=x^2(-1+\ln x)$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

**a.** Pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x)=2x+\frac{1}{x}$.
**b.** La fonction f est croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
**c.** $f'(\sqrt{e})$ est différent de 0.
**d.** La droite d'équation $y=-\frac{1}{2}e$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\sqrt{e}$.

**Question 4**

Un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus. On tire successivement et avec remise 5 jetons du sac.
La probabilité de tirer exactement 2 jetons jaunes, arrondie au millième, est :

**a.** 0,683 **b.** 0,346 **c.** 0,230 **d.** 0,165

**Question 5**

Un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus. On tire successivement et avec remise 5 jetons du sac.
La probabilité de tirer au moins un jeton jaunes, arrondie au millième, est :

**a.** 0,078 **b.** 0,259 **c.** 0,337 **d.** 0,922

**Question 6**

Un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus.
On réalise l'expérience aléatoire suivante : on tire avec remise cinq jetons du sac.
On note le nombre de jetons jaunes obtenus après ces cinq tirages.
Si on répète cette expérience aléatoire un très grand nombre de fois alors, en moyenne, le nombre de jetons jaunes est égal à :

**a.** 0,4 **b.** 1,2 **c.** 2 **d.** 2,5

## CORRECTION

**Question 1    Réponse : d**

*Preuve non demandée*

$$a=\ln(9)+\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\ln\left(\frac{1}{9}\right)$$

$$a=\ln\left(9\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{9}\right)=\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\ln(\sqrt{3})-\ln(3)=\frac{1}{2}\ln(3)-\ln(3)=-\frac{1}{2}\ln(3)$$

**Question 2    Réponse : c**

*Preuve non demandée*

$(E):\ \ln x+\ln(x-10)=\ln 3+\ln 7$

Ensemble de définition de (E)    $D=]10;+\infty[\quad (x>10)$

$$(E)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} x>10\\ \ln[x(x-10)]=\ln(3\times 7)\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} x>10\\ x(x-10)=21\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} x>10\\ x^2-10x-21=0\end{cases}$$

$$\Delta=(-10)^2-4\times 1\times(-21)=100+84=184=4\times 46$$

$$x_1=\frac{10-2\sqrt{46}}{2}=5-\sqrt{46}<10 \qquad x_2=\frac{10+2\sqrt{46}}{2}=5+\sqrt{46}>10\ .$$

Donc (E) admet une solution unique.

**Question 3    Réponse : d**

*Preuve non demandée*

$$f(x)=x^2(-1+\ln x) \qquad f'(x)=2x(-1+\ln x)+x^2\times\frac{1}{x}=-2x+2x\ln x+x=-x+2x\ln x$$

$$f'(\sqrt{e})=-\sqrt{e}+2\sqrt{e}\times\ln(\sqrt{e})=-\sqrt{e}+2\sqrt{e}\times\frac{1}{2}\ln e=-\sqrt{e}+\sqrt{e}=0$$

$$f(\sqrt{e})=e\left(-1+\frac{1}{2}\right)=-\frac{e}{2}=-\frac{1}{2}e$$

donc la droite d'équation $y=-\frac{1}{2}e$ est tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\sqrt{e}$ .

**Question 4    Réponse : c**

*Preuve non demandée*

On suppose que les jetons sont indiscernables au toucher et que les tirages des 5 jetons sont indépendants.
On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :
On tire au hasard un jeton du sac.

Succès S : « le jeton tiré est jaune » la probabilité de succès est $p=\frac{20}{50}=0{,}4$ .

Échec $\bar{S}$ : « le jeton tiré est bleu » la probabilité de l'échec est $q=\frac{30}{50}=0{,}6$ .

On effectue 5 tirages indépendants et on considère la variable aléatoire X égale au nombre de succès en 5 épreuves. La loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0{,}4$ .
Pour cette question on doit calculer $P(X=2)$ .
On utilise la calculatrice.

$P(X=2)=\binom{5}{2}\ 0{,}4^2\times 0{,}6^3\simeq 0{,}230$ (valeur arrondie au millième)

**Question 5** **Réponse :** **d**
*Preuve non demandée*

On doit calculer $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0)$
$P(X=0) = \binom{5}{0} 0{,}4^0 \times 0{,}6^5 \simeq 0{,}078$ (valeur arrondie au millième)
$P(X \geqslant 1) \simeq 1 - 0{,}078 = 0{,}922$ .

**Question 6** **Réponse :** **c**
*Preuve non demandée*

Si on répète l'expérience un très grand nombre de fois, en moyenne, le nombre de jetons jaunes tirés sera égal à l'espérance mathématique de $X$.
$E(X) = n \times p = 5 \times 0{,}4 = 2$