Exercice 1 — 7 points

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

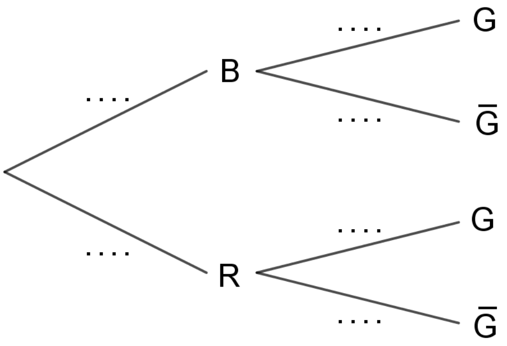
Thèmes: Probabilités conditionnelles - variables aléatoires

Lors d'une kermesse, un organisateur de jeux dispose, d'une part, d'une roue comportant quatre cases blanches et huit cases rouges et, d'autre part, d'un sac contenant cinq jetons portant les numéros 1, 2, 3, 4 et 5.
Le jeu consiste à faire tourner la roue, chaque case ayant la même probabilité d'être obtenue, puis à extraire un ou deux jetons du sac selon la règle suivante :

- si la case obtenue pour la roue est blanche, alors le joueur extrait un jeton du sac
- si la case obtenue pour la roue est rouge, alors le joueur extrait successivement et sans remise deux jetons du sac.

Le joueur gagne si le ou les jetons tirés portent tous un numéro impair.

1. Un joueur fait une partie et on note B l'événement « la case obtenue est blanche », R l'événement « la case obtenue est rouge » et G l'événement « le joueur gagne la partie ».
1.a. Donner la valeur de la probabilité conditionnelle $P_B(G)$.
1.b. On admettra que la probabilité de tirer successivement et sans remise deux jetons impairs est égale à 0,3. Recopier et compléter l'arbre de probabilités suivant :



2.a. Montrer que $P(G)=0{,}4$.
2.b. Un joueur gagne la partie. Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu une case blanche en lançant la roue ?

3. Les événements B et G sont-ils indépendants ? Justifier.

4. Un joueur fait 10 parties. Les jetons tirés sont remis dans le sac après chaque partie.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.
4.a. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
4.b. Calculer la probabilité arrondie à 10^{-3} près que le joueur gagne exactement trois parties sur les dix parties jouées.
4.c. Calculer $P(X\geqslant 4)$ arrondie à 10^{-3} près. Donner une interprétation du résultat obtenu.

5. Si le joueur fait n parties, on note p_n la probabilité de l'événement « le joueur gagne au moins une partie »
5.a. Montrer que $p_n=1-0{,}6^n$.
5.b. Déterminer la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle la probabilité de gagner au moins une partie est supérieure ou égale à 0,99 ?

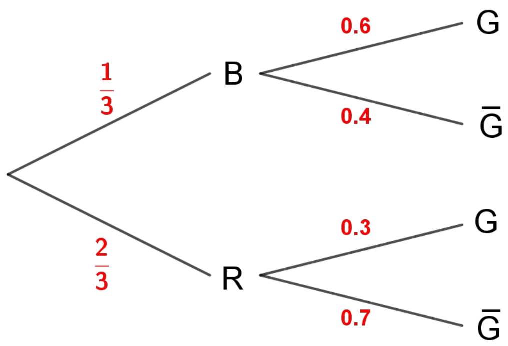
CORRECTION

1.a. Il y a 3 chiffres impairs parmi les 5 chiffres 1 ; 2; 3 ; 4 et 5. La probabilité que le joueur extrait un jeton portant un chiffre impair est : $\frac{3}{5}=0,6$ donc $P_B(G)=0,6$.

1.b. Sur la roue il y a 4 cases blanches et huit rouges, chaque case a la même probabilité d'être obtenue donc :

$P(B)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ et $P(R)=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$

- $P_B(G)=0,6$ donc $P_B(\bar{G})=1-0,6=0,4$.
- On admet que $P_R(G)=0,3$ donc $P_R(\bar{G})=1-0,3=0,7$.
- On obtient l'arbre pondéré suivant :



2.a. En utilisant la formule des probabilités totales.

$P(G)=P(B\cap G)+P(R\cap G)=P(B)\times P_B(G)+P(R)\times P_R(G)=\frac{1}{3}\times 0,6+\frac{2}{3}\times 0,3$

$P(G)=0,2+0,2=0,4$

2.b. On nous demande de calculer : $P_G(B)$.

$P_G(B)=\frac{P(B\cap G)}{P(G)}=\frac{0,2}{0,4}=\frac{1}{2}=0,5$.

3. $P(B\cap G)=0,2$ $\quad P(B)\times P(G)=\frac{1}{3}\times 0,4=\frac{0,4}{3}=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$

$P(B\cap G)\neq P(B)\times P(G)$ donc les événements B et G ne sont pas indépendants.

4.a. Épreuve de Bernoulli : le joueur effectue une partie

succès S : « le joueur gagne la partie » probabilité de succès $p=P(G)=0,4$

échec $\bar{S}$: « le joueur ne gagne pas la partie » probabilité de l'échec $q=P(\bar{G})=0,6$.

Après chaque partie on remet les jetons dans le sac donc les 10 parties sont indépendantes.

X est la variable aléatoire égale au nombre de succès en 10 épreuves.

La loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=4$.

4.b. $P(X=3)=\binom{10}{3}\ 0,4^3\times 0,6^7\simeq 0,215$ (valeur arrondie au millième)

Résultat obtenu en utilisant la calculatrice.

4.c. En utilisant la calculatrice

$P(X\geqslant 4)\simeq 0,618$

5.a. $p_n=P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)$

$P(X=0)=\binom{10}{0}\ 0,4^0\times 0,6^n=0,6^n$ et $p_n=1-0,6^n$

5.b. $1-0{,}6^n \geqslant 0{,}99 \quad \Leftrightarrow \quad 1-0{,}99 \geqslant 0{,}6^n \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}01 \geqslant 0{,}6^n$

ln est croissante sur $]0\,;+\infty[$

$\Leftrightarrow \quad \ln(0{,}01) \geqslant \ln(0{,}6^n) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(0{,}01) \geqslant n \times \ln(0{,}6)$

$0<0{,}6<1$ donc $\ln(0{,}6)<0$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}6)} \leqslant n$

En utilisant la calculatrice : $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}6)} = 9{,}015$ à 10^{-3} près.

n est un entier naturel

$\Leftrightarrow \quad 10 \leqslant n$

Il faut jouer au moins 10 parties pour avoir une probabilité, de gagner au moins une partie, supérieure ou égale à 0,99.