Exercice 2 7 points

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thèmes: Suites numériques - Algorithme et programmation

Un médicament est administré à un patient par voie intraveineuse.

Partie A : modèle discret de la quantité médicamenteuse

Après une première injection de 1 mg de médicament, le patient est placé sous perfusion.
On estime que toutes les 30 minutes, l'organisme du patient élimine 10 % de la quantité de médicament présente dans le sang et qu'il reçoit une dose supplémentaire de 0,25 mg de la substance médicamenteuse.
On étudie l'évolution de la quantité de médicament dans le sang avec le modèle suivant : pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité, mg, de médicament dans le sang du patient au bout de n périodes de 30 minutes. On a donc $u_0=1$.

1. Calculer la quantité de médicament dans le sang au bout d'une demi-heure.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=0{,}9\,u_n+0{,}25$.

3.a. Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}<5$
3.b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. On estime que le médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang du patient est supérieure ou égale à 1,8 mg.
4.a. Recopier et compléter le script suivant, écrit en langage Python,de manière à déterminer au bout de combien de périodes de trente minutes le médicament commence à être réellement efficace.

```
def efficace():
    u=1
    n=0
    while . . . . . . ..
        u=. . . . . . . .
        n=n+1
    return n
```

4.b. Quelle est la valeur renvoyée par ce script ?
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

5. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $u_n=2{,}5-v_n$.

5.a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont précisera la raison et le premier terme v_0 .

5.b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n=2{,}5-1{,}5\times 0{,}9^n$

5.c. Le médicament devient toxique lorsque sa quantité présente dans le sang dépasse 3 mg.
D'après le modèle choisi le traitement présente-t-il un risque pour le patient ? Justifier.

Partie B : modèle continu de la quantité médicamenteuse

Après une injection initiale de 1 mg de médicament, le patient est placé sous perfusion.
Le débit dela substance médicamenteuse administrée au patient est de 0,5 mg par heure.
La quantité de médicament dans le sang du patient en fonction du temps, est modélisée par la fonction f, définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(t)=2,5-1,5e^{-0,2t}$ où t désigne la durée de la perfusion exprimée en heure.
On rappelle que ce médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang du patient est supérieure ou égale à 1,8 mg.

1. Le médicament est-il réellement efficace au bout de 3h45min ?

2. Selon ce modèle, déterminer au bout de combien de temps le médicament devient réellement efficace.

3. Comparer le résultat obtenu avec celui obtenu à la question 4.b. du modèle discret de la partie A.

CORRECTION

Partie A :

1. Au bout d'une demi-heure le patient élime 10 % de 1 mg (quantité de substance médicamenteuse contenue initialement dans le sang du patient) soit 0,1 mg et on lui administre 0,25 mg de substance médicamenteuse.
On obtient : $1-0{,}1+0{,}25=1{,}15$ mg .

2. Au bout de la (n+1)$^{\text{ième}}$ période de 30 min, le patient a éliminé pendant cette période 10 % de u_n (quantité de substance médicamenteuse contenue dans le sang du patient à la fin de la n$^{\text{ième}}$ période) et il reçoit 0,25 mg supplémentaire de substance médicamenteuse.

Donc $u_{n+1}=u_n-\frac{10}{100}u_n+0{,}25=u_n-0{,}1\,u_n+0{,}25=(1-0{,}1)u_n+0{,}25$

$u_{n+1}=0{,}9\,u_n+0{,}25$

3.a. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n :
$u_n\leqslant u_{n+1}<5$.

Initilisation

Pour n=0, $u_0=1$ et $u_1=1{,}15$

$1\leqslant 1{,}15<5 \quad\Leftrightarrow\quad u_0\leqslant u_1<1$

La propriété est vérifiée pour n=0

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que $u_n\leqslant u_{n+1}<5$ et on doit démontrer que $u_{n+1}\leqslant u_{n+2}<5$.

Si $u_n\leqslant u_{n+1}<5$ alors $0{,}9\,u_n\leqslant 0{,}9\,u_{n+1}<0{,}9\times 5$ et $0{,}9\,u_n+0{,}25\leqslant 0{,}9\,u_{n+1}+0{,}25<0{,}9\times 5+0{,}25$

donc $u_{n+1}\leqslant u_{n+2}<4{,}75<5$

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n : $u_n\leqslant u_{n+1}<1$.

3.b. Pour tout entier naturel n, on a $u_n\leqslant u_{n+1}$ donc (u_n) est une suite croissante et on a $u_n<5$ donc la suite (u_n) est majorée par 5.
Toute suite croissante et majorée est convergente donc la suite (u_n) est convergente.

4.a.

```
def efficace():
  u=1
  n=0
  while u<1.8:
    u=0.9*u+0.25
    n=n+1
  return n
```

4.b. Si on exécute le programme, on obtient **n=8.**
Il faut 8 périodes de 30 minutes (soit 4h) pour que le médicament soit réellement efficace.

5. Pour tout entier naturel n : $v_n=2{,}5-u_n \quad\Leftrightarrow\quad u_n=2{,}5-v_n$

5.a. Pour tout entier naturel n :

$v_{n+1}=2{,}5-u_{n+1}=2{,}5-(0{,}9\,u_n+0{,}25)=2{,}5-0{,}9\,u_n-0{,}25=2{,}25-0{,}9(2{,}5-v_n)$

$v_{n+1}=2{,}25-0{,}9\times 2{,}5+0{,}9\,v_n=2{,}25-2{,}25+0{,}9\,v_n=0{,}9\,v_n$

(v_n) est la suite géométrique de raison 0,9 et de premier terme $v_0=2{,}5-u_0=1{,}5$.

5.b. Pour tout entier naturel n :

$v_n = v_0 \times q^n = 1{,}5 \times 0{,}9^n$

$u_n = 2{,}5 - v_n = 2{,}5 - 1{,}5 \times 0{,}9^n$

5.c. Pour tout entier naturel n :

$u_n = 2{,}5 - 1{,}6 \times 0{,}9^n < 2{,}5 < 3$

Donc pour le modèle choisi, le médicament ne présente aucun risque pour le patient.

Partie B :

1. 3h45min=3,75h

En utilisant la calculatrice :

$f(3{,}75) = 2{,}5 - 1{,}5 \times e^{-0{,}2\times 3{,}75} = 2{,}5 - 1{,}5\,e^{-0{,}75} \simeq 1{,}791$ arrondi au millième

$1{,}791 < 1{,}8$ le médicament n'est pas réellement efficace au bout de 3h45min.

2. $f(t) \geqslant 1{,}8 \quad \Leftrightarrow \quad 2{,}5 - 1{,}5 \times e^{-0{,}2\,t} \geqslant 1{,}8 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}7 \geqslant 1{,}5\,e^{-0{,}2\,t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{0{,}7}{1{,}5} \geqslant e^{-0{,}2\,t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{7}{15} \geqslant e^{-0{,}2\,t}$

ln est une fonction croissante sur $]0\,;+\infty[$

$\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{7}{15}\right) \geqslant -0{,}2\,t \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{0{,}2} \times \ln\left(\frac{7}{15}\right) \leqslant t \quad \Leftrightarrow \quad -5 \times \ln\left(\frac{7}{15}\right) \leqslant t$

$-5 \times \ln\left(\frac{7}{15}\right) \simeq 3{,}81$ arrondi au centième

1h=60 min $\qquad 0{,}81 \times 60 \simeq 49$ arrondi à l'unité.

Avec ce modèle le médicament devient réellement efficace au bout 3h49min.

3. Le modèle de la Partie B permet au médicament de devenir réellement efficace plus rapidement que le modèle de la Partie A.