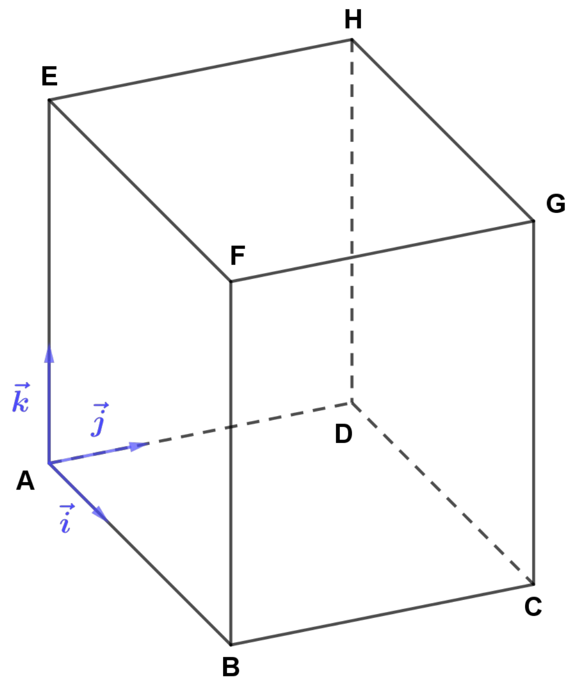
Exercice 3 — 7 points

Le sujet propose 4 exercices.
*Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et **ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thème: géométrie de l'espace

Le solide ABCDEFGH est un cube. On se place dans le repère orthonormé $(A;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ de l'espace dans lequel les coordonnées des points B ; D et E sont :
$B(3;0;0)$; $D(0;3;0)$ et $E(0;0;3)$.



On considère les points $P(0;0;1)$; $Q(0:2:3)$ et $R(1;0;3)$

1. Placer les points P, Q et R sur la figure en **Annexe** qui sera rendu avec la copie.
2. Montrer que le triangle PQR est isocèle en R.
3. Justifier que les points P, Q et R définissent un plan.
4. On s'intéresse maintenant à la distance entre le point E et le plan (PQR).

4.a. Montrer que le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (PQR).

4.b. En déduire une équation cartésienne du plan (PQR).
4.c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point E et orthogonale au plan (PQR).

4.d. Montrer que le point $L\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{8}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point E sur le plan (PQR).

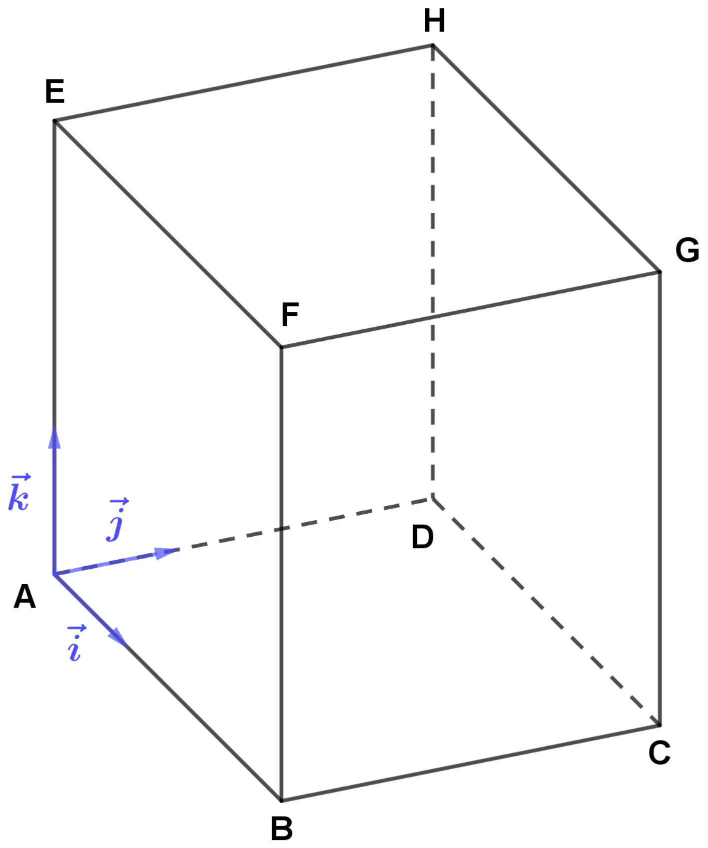
5. En choisissant le triangle EQR comme base montrer que le volume du tétraèdre EPQR est $\frac{2}{3}$.

On rappelle que le volume du tétraèdre est donné par la formule :

$V=\frac{1}{3}\times \text{aire d'une base}\times\text{hauteur correspondante}$

6. Trouver, à l'aide des deux questions précédentes, l'aire du triangle (PQR).

ANNEXE à rendre avec la copie



CORRECTION

1. Réponse sur la feuille **ANNEXE.**

2. $P(0;0;1)$ $Q(0;2;3)$ $R(1;0;3)$

$QR^2=(1-0)^2+(0-2)^2+(3-3)^2=1+4=5$ $\quad QR=\sqrt{5}$

$PR=QR=\sqrt{5}$ donc le triangle PQR est isocèle en R.

3. $PQ^2=(0-0)^2+(2-0)^2+(3-1)^2=4+4=8$ $\quad PQ=\sqrt{8}=2\sqrt{2}>\sqrt{5}$

$PQ=2\sqrt{2}\neq PR+QR=2\sqrt{5}$ donc les points P, Q et R ne sont pas alignés et ces trois points définissent un plan.

4.a. Le vecteur $\vec{u}$ est normal au plan au plan (PQR) si et seulement si $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (PQR) par exemples : $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{QR}$.

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{QR}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$

$\vec{u}.\overrightarrow{PR}=2\times1+1\times0-1\times2=2-2=0$

Le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{QR}$ donc le vecteur $\vec{u}$ est normal au plan (PQR).

4.b. $M(x;y;z)\in(PQR)$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{PM}.\vec{u}=0$

$\overrightarrow{PM}\begin{pmatrix}x-0\\y-0\\z-0\end{pmatrix}$ $\quad \vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PM}.\vec{u}=x\times2+y\times1+(z-1)\times(-1)=0$ $\Leftrightarrow$ $2x+y-z+1=0$

(PQR): $2x+y-z+1=0$.

4.c. (d) est la droite passant par E(0;0;3) et de vecteur directeur $\vec{u}$.

$$(d):\begin{cases}x=2\times t+0\\ y=1\times t+0\\ z=-1\times t+3\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$$

4.d. Le projeté orthogonal de E sur le plan (PQR) est le point d'intersection de la droite (d) et du plan (PQR) ;
On résout le système :

$$\begin{cases}2x+y-z+1=0\\ x=2t\\ y=t\\ z=-t+3\end{cases}$$

On obtient : $2\times(2t)+t-(-t+3)+1=0$ $\Leftrightarrow$ $4t+t+t-2=0$ $\Leftrightarrow$ $6t=2$ $\Leftrightarrow$ $t=\frac{1}{3}$

donc $x=\frac{2}{3}$ $\quad y=\frac{1}{3}$ et $z=-\frac{1}{3}+3=\frac{8}{3}$ et $L\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{8}{3}\right)$.

5. Dans le tétraèdre EPQR, PE est la hauteur correspondante à la base EQR. EQR est un triangle rectangle en E et $ER=1$ et $EQ=2$ $\quad$ aire de EPR $=\frac{1}{2}\times1\times2=1$.

$EP=2$ $\quad V=\frac{1}{3}\times1\times2=\frac{2}{3}$

6. EL est la hauteur correspondante à la base PQR.

$EL^2=\left(\frac{2}{3}-0\right)^2+\left(\frac{1}{3}-0\right)^2+\left(\frac{8}{3}-3\right)^2=\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{6}{9}$ $\quad EL=\frac{\sqrt{6}}{3}$

On note A_{PQR} l'aire du triangle PQR.

$V=\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\times A_{PQR}\times\frac{\sqrt{6}}{3}$ $\Leftrightarrow$ $A_{PQR}=\frac{2}{3}\times\frac{9}{\sqrt{6}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$

ANNEXE à rendre avec la copie