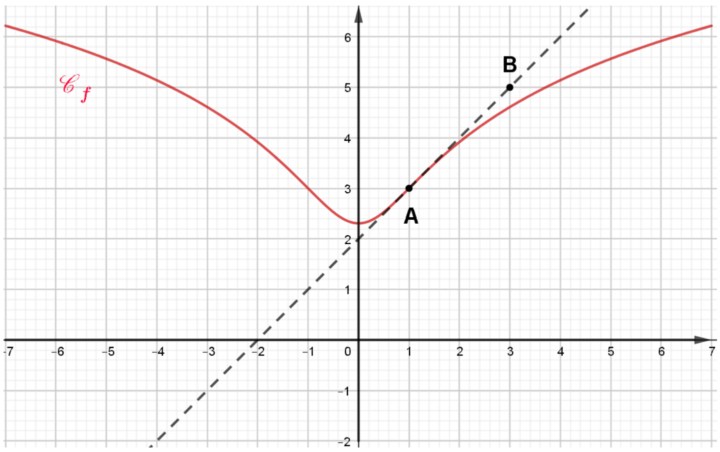
Exercice 4 — 7 points

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thèmes: Etude de fonctions - Fonction logarithme

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On considère les points A(1:3) et B(3;5).
On donne ci-dessous $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan, ainsi que la tangente (AB) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.



Les trois parties de l'exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

2. La fonction f est définie par l'expression $f(x)=\ln(ax^2+1)+b$, où a et b sont des nombres positifs.
2.a. Déterminer l'expression de $f'(x)$.
2.b. Déterminer les valeurs de a et b à l'aide des résultats précédents.

Partie B

On admet que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln(x^2+1)+3-\ln(2)$.

1. Montrer que f est une fonction paire.

2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

3. Déterminer l'expression de $f'(x)$.
Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Dresser le tableau des variations de f, donner la valeur exacte du minimum ainsi que les limites en $-\infty$ et $+\infty$.

4. À l'aide du tableau des variations de f, donner les valeurs du réel k pour lesquelles l'équation $f(x)=k$ admet deux solutions.

5. Résoudre l'équation : $f(x)=3+\ln(2)$.

Partie C

On rappelle que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln(x^2+1)+3-\ln(2)$.

1. Conjecturer par lecture graphique, les abscisses des points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. Montrer que, pour tout réel x, on a : $f''(x)=\dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$.

3. En déduire le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

CORRECTION

Partie A

1. La courbe représentative de f passe par le point A(1;3) donc $f(1)=3$.
(AB) est la tangente en A à $\mathscr{C}_f$ donc $f'(1)$ est égal au coefficient directeur de la droite (AB) celui-ci est égal à 1 (par lecture graphique) ou $\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{5-3}{3-1}=1$ donc $f'(1)=1$.

2.a. Si u est une fonction dérivable et strictement croissante sur un intervalle I alors la fonction g définie sur I par $g(x)=\ln(u(x))$ est dérivable sur I $g'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$.
La fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=ax^2+1$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ et $u'(x)=2ax$
La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\ln(ax^2+1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x)=\frac{2ax}{ax^2+1}$.
3 – ln(2) est une constante donc $f'(x)=\frac{2ax}{ax^2+1}$.

2.b. $f(1)=\ln(a+1)+b=3$
$f'(1)=\frac{2a}{a+1}=1 \quad \Leftrightarrow \quad 2a=a+1 \quad \Leftrightarrow \quad 2a-a=1 \quad \Leftrightarrow \quad a=1$.
$f(1)=\ln(1+1)+b=3 \quad \Leftrightarrow \quad b=3-\ln(2)$.
Pour tout nombre réel x : $f(x)=\ln(x^2+1)+3-\ln(2)$.

Partie B

1. Pour tout nombre réel x :
$f(-x)=\ln((-x)^2+1)+3-\ln(2)=\ln(x^2+1)+3-\ln(2)=f(x)$
Donc f est une fonction paire.

2. $\lim_{x\to+\infty}(x^2+1)=+\infty$ et $\lim_{X\to+\infty}\ln(X)=+\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty}\ln(x^2+1)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.
$\lim_{x\to-\infty}(x^2+1)=+\infty$ et $\lim_{X\to+\infty}\ln(X)=+\infty$ donc $\lim_{x\to-\infty}\ln(x^2+1)=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

3. Pour tout nombre réel x : $f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$.
Le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ est le signe de 2x donc f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty;0]$.
Tableau des variations de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f '(x)		−	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	3-ln(2)	↗	$+\infty$

$f(0)=\ln(1)+3-\ln(2)=3-\ln(2)$ est la valeur exacte du minimum de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

4. Le minimum de f est: 3 – ln(2).
Si $k<3-\ln(2)$ alors l'équation $f(x)=k$ n'admet pas de solution.
Si $k=3-\ln(2)$ alors la droite d'équation $y=3-\ln(2)$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 donc l'équation $f(x)=3-\ln(2)$ admet deux solutions confondues $x_1=x_2=0$.
Si $k>3-\ln(2)$ alors l'équation $f(x)=k$ admet deux solutions opposées (car la fonction f est paire).

5. $f(x)=3-\ln(2) \Leftrightarrow \ln(x^2+1)+3-\ln(2)=3+\ln(2) \Leftrightarrow \ln(x^2+1)=2\ln(2)=\ln(2^2)=\ln(4)$
$\Leftrightarrow x^2+1=4 \Leftrightarrow x^2-3=0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0$
$\mathscr{S}=\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$

Partie C

1. Conjecture graphique : le point A d'abscisse 1 est un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$ de même le point C(-1;3) est un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$ (car la fonction est paire).

2. Pour tout nombre réel x : $f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$.
$u(x)=2x \quad u'(x)=2 \quad v(x)=x^2+1 \quad v'(x)=2x$
$f''(x)=\frac{2\times(x^2+1)-2x\times2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(x+1)^2}$.

3. Le signe de $f''(x)$ est le signe de $2(1-x^2)$ donc si $x<-1$ **ou** $1<x$ alors $f''(x)<0$ et si $-1\leqslant x\leqslant 1$ alors $f''(x)\geqslant 0$.
f est convexe sur [-1;1].