## Exercice 1 — 7 points

*Le sujet propose 4 exercices.*
*Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et **ne doit traiter que ces 3 exercices.***
*Chaque exercice est noté sur 7 points ( le total sera ramené sur 20).*
*Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.*

**Thème: Géométrie de l'espace**

Dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ de l'espace, on considère les points :
A(-3;1;3); B(2;2;3); C(1;7;-1); D(-4;6;-1) et K(-3;14;14).

**1.a.** Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
**1.b.** Montrer que le quadrilatère ABCD est un rectangle.
**1.c.** Calculer l'aire du rectangle ABCD.

**2.a.** Justifier que les points A ; B et D définissent un plan.
**2.b.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\10\\13\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABD).
**2.c.** En déduire une équation cartésienne du plan (ABD).

**3.a.** Donner une représentation paramétrique de la droite $\Delta$ orthogonale au plan (ABD) et qui passe par le point K.
**3.b.** Déterminer les coordonnées du point I projeté orthogonal du point K sur le plan (ABD).
**3.c.** Montrer que la hauteur de la pyramide KABCD de base ABCD et de sommet K vaut $\sqrt{273}$.

**4.** Calculer le volume V de la pyramide KABCD.
On rappelle que le volume V d'une pyramide est donnée par la formule :
$$V=\frac{1}{3}\times \text{aire de la base}\times \text{hauteur}$$

## CORRECTION

**1.a.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\4\\-4\end{pmatrix}$

**1.b.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ donc le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=5\times(-1)+1\times5+0\times(-4)=-5+5=0$ . Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux donc le quadrilatère ABCD est un rectangle.

**1.c.** $AB^2=5^2+1^2+0^2=25+1=26$ $AB=\sqrt{26}$ ( en unité de longueur).
$AD^2=(-1)^2+5^2+(-4)^2=1+25+16=42$ $AD=\sqrt{42}$ (en unité de longueur).
Aire de ABCD= $AB\times AD=\sqrt{26}\times\sqrt{42}=\sqrt{26\times42}=\sqrt{4\times273}=2\sqrt{273}$ (en unité d'aire).

**2.a.** Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux et non nuls donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires et les points A;B et D ne sont pas alignés.

**2.b.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\5\\-4\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\10\\13\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}.\vec{n}=5\times(-2)+1\times10+0\times13=-10+10=0$
$\overrightarrow{AD}.\vec{n}=-1\times(-2)+5\times10-4\times13=2+50-52=0$ .
Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABD) donc le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABD).

**2.c.** $M(x;y;z)$ $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+3\\y-1\\z-3\end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\10\\13\end{pmatrix}$

$M\in(ABD) \Leftrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AM}=0 \Leftrightarrow -2\times(x+3)+10\times(y-1)+13\times(z-3)=0$
$\Leftrightarrow -2x-6+10y-10+13z-39=0 \Leftrightarrow -2x+10y+13z-55=0$ .
$(ABD):\ -2x+10y+13z-55=0$ .

**3.a.** $\Delta$ est la droite passant par $K(-3;14;14)$ et de vecteur directeur $\vec{n}$ .

$$(\Delta):\ \begin{cases}x=-2t-3\\ y=10t+4\\ z=13t+14\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$$

**3.b.** Le projeté orthogonal du point K sur le plan (ABD) et le point d'intersection I du plan (ABD) et de la droite $\Delta$ .
On résout le système :

$$\begin{cases}-2x+10y+13z-55=0\\ x=-2t-3\\ y=10t+14\\ z=13t+14\end{cases}$$

On obtient : $-2\times(-2t-3)+10\times(10t+14)+13\times(13t+14)-55=0$

$\Leftrightarrow 4t+6+100t+140+169t+182-55=0 \Leftrightarrow 273t+273=0 \Leftrightarrow t=-\frac{273}{273}=-1$ .

$x=-1$ $y=4$ $z=1$ $I(-1;4;1)$

**3.c.** La hauteur de la pyramide KABCD de base ABCD est : KI.
$K(-3;14;14)$ $I(-1;4;1)$ $KI^2=2^2+(-10)^2+(-13)^2=4+100+169=273$
$KI=\sqrt{273}$ (en unité de longueur).

**4.** $V=\frac{1}{3}\times2\sqrt{273}\times\sqrt{273}=\frac{2\times273}{3}=2\times91=182$ (en unité de volume)