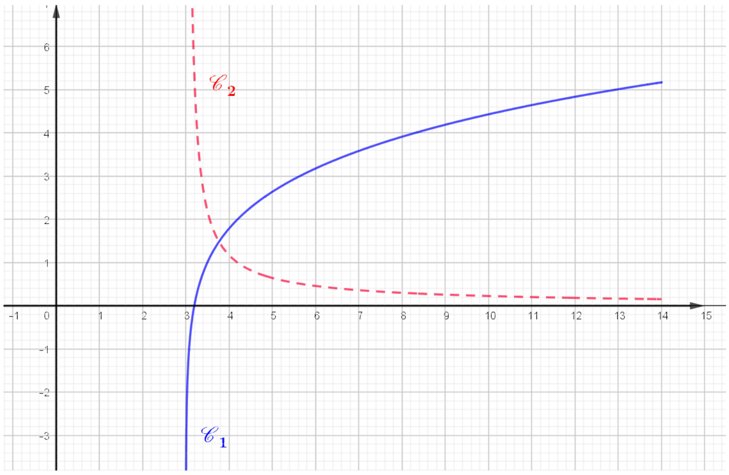
Exercice 2 — 7 points

Le sujet propose 4 exercices.
*Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et **ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thèmes: Etude de fonctions - fonction logarirhme

Partie A



Dans un repère orth0normé ci-dessus, sont tracées les courbes représentatives d'une fonction f et de sa fonction dérivée, notée f' , toutes deux définies sur $]3;+\infty[$.

1. Associer à chaque courbe la fonction qu'elle représente. Justifier.

2. Déterminer graphiquement la ou les solutions de l'équation $f(x)=3$.

3. Indiquer par lecture graphique, la convexité de la fonction f.

Partie B

1. Justifier que la quantité $\ln(x^2-x-6)$ est bien définie pour les valeurs de x de l'intervalle $]3;+\infty[$, que l'on nommera I dans la suite.

2. On admet que la fonction f de la Partie A est définie par $f(x)=\ln(x^2-x-6)$ sur I.
Calculer les limites de la fonction f aux deux bornes de l'intervalle I.
En déduire une équation de l'asymptote à la courbe représentative de la fonction f sur I.

3.a. Calculer $f'(x)$ pour tout x de I.
3.b. Étudier le sens de variation de la fonction f sur I.
Dresser le tableau des variations de la fonction f en y faisant figurer les limites aux bornes de I.

4.a. Justifier que l'équation $f(x)=3$ admet une solution unique α sur l'intervalle]5;6[.
4.b. Déterminer à l'aide de la calculatrice, un encadrement de α à 10^{-2} près.

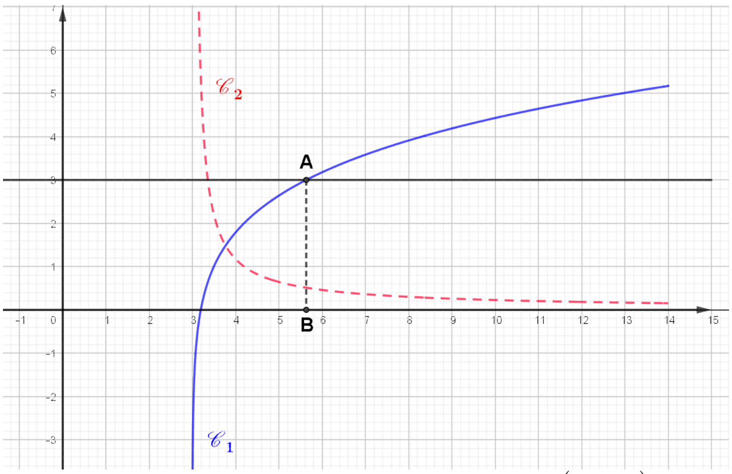
5.a. Justifier que $f''(x)=\dfrac{-2x^2+2x-13}{(x^2-x-6)^2}$.

5b. Étudier la convexité de la fonction f sur I.

CORRECTION

1. $\mathscr{C}_2$ est au dessus de l'axe des abscisses sur $]3;+\infty[$ donc $\mathscr{C}_2$ est la courbe représentative d'une fonction positive sur $]3;+\infty[$ et $\mathscr{C}_2$ est la courbe représentative d'une fonction décroissante sur $]3;+\infty[$.
$\mathscr{C}_1$ est la courbe représentative d'une fonction croissante sur $]3;+\infty[$ et $\mathscr{C}_1$ est la courbe représentative d'une fonction qui change de signe sur l'intervalle $]3;+\infty[$ d'abord négative puis positive donc $\mathscr{C}_1$ n'est pas la courbe représentative de la fonction dérivée d'une fonction décroissante sur $]3;+\infty[$.
Par contre $\mathscr{C}_2$ peut-être la courbe représentative de la fonction dérivée d'une fonction croissante sur $]3;+\infty[$.
$\mathscr{C}_1$ est la courbe représentative de f sur $]3;+\infty[$ et $\mathscr{C}_2$ est la représentative de f' sur $]3;+\infty[$.

2.



La droite d'équation $y=3$ coupe la courbe $\mathscr{C}_1$ en un seul point $A(x_A;3)$ donc l'équation $f(x)=3$ admet une seule solution : $x_A \simeq 5{,}6$.

3. La fonction f est concave sur $]3;+\infty[$.

Partie B

1. On détermine le signe du trinôme : x^2-x-6 sur $\mathbb{R}$. $\Delta=(-1)^2-4\times1\times(-6)=1+225=5^2$

$x_1=\dfrac{1-5}{2}=-2$ $\qquad x_2=\dfrac{1+5}{2}=3$ $\qquad$ Le coefficient de x^2 est positif.

On donne le signe du trinôme x^2-x-6 sous forme d'un tableau.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
x^2-x-6		+	0	−	0	+	

Donc pour tout nombre réel x de $]3;+\infty[$ on a : $x^2-x-6>0$ et l'expression $\ln(x^2-x-6)$ est définie sur $]3;+\infty[$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-x-6)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln(X)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

. Si $x>3$ alors $x^2-x-6>0$ $\quad \lim\limits_{x\to3}(x^2-x-6)=0$ et $\lim\limits_{X\to0}\ln(X)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to3}f(x)=-\infty$.

La droite d'équation $x=3$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f.

3.a. Pour tout nombre réel de I.

$u(x)=x^2-x-6 \qquad u'(x)=2x-1$

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{2x-1}{x^2+x-6}$$

3.b. Si $x>3$ alors $2x-1>6-1=5>0$ et $x^2-x-6>0$ donc $f'(x)>0$.
f est strictement croissante sur $]3;+\infty[$.
Tableau de variation de f

x	$-\infty$	$+\infty$
f '(x)	+	
f(x)	$-\infty$ ↗	$+\infty$

4.a. $f(5)=\ln(14)\simeq 2{,}64<3$ $\qquad f(6)=\ln(24)\simeq 3{,}17>3$
f est continue et strictement croissante sur l'intervalle]5;6[à valeurs dans $]f(5);f(6)[$.
3 appartient à l'intervalle $]f(5);f(6)[$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que 3 admet un unique antécédent α par f appartenant à l'intervalle]5:6[.
Donc l'équation $f(x)=3$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle]5;6[.

4.b. En utilisant la calculatrice, on obtient :
$5{,}63<\alpha<5{,}64$ et $\alpha\simeq 5{,}63$.

5.a. $f'(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x-6}$
$u(x)=2x-1 \qquad u'(x)=2 \qquad v(x)=x^2-x-6 \qquad v'(x)=2x-1$

$$f''(x)=\frac{2\times(x^2-x-6)-(2x-1)\times(2x-1)}{(x^2-x-6)^2}=\frac{2x^2-2x-12-4x^2+4x-1}{(x^2-x-6)^2}=\frac{-2x^2+2x-13}{(x^2-x-6)^2}$$

5.b. Le signe de $f''(x)$ sur $]3;+\infty[$ est le signe du trinôme : $-2x^2+2x-13$.
$\Delta=2^2-4\times(-2)\times(-13)=4-104=-100<0$
Le coefficient de x^2 est négatif.
Donc pour tout nombre réel x de I, $f''(x)<0$.
La fonction f est concave sur $]3;+\infty[$.