Exercice 3 — 7 points

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thèmes: Probabilités conditionnelles - Variables aléatoires

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Partie 1

Julien doit prendre l'avion ; il a prévu de prendre le bus pour se rendre à l'aéroport.
S'il prend le bus de 8h, il est sûr d'être à l'aéroport à temps pour son vol.
Par contre, le bus suivant ne lui permettrait pas d'arriver à temps à l'aéroport.
Julien est parti en retard de son appartement et la probabilité qu'il manque son bus est de 0,8.
S'il manque son bus, il se rend à l'aéroport en prenant une compagnie de voitures privée, il a alors une probabilité de 0,5 d'être à l'heure à l'aéroport.
On notera :
. B l'événement : « Julien réussit à prendre son bus » ;
. V l'événement : « Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol ».

1. Donner la valeur de $P_B(V)$.

2. Représenter la situation par un arbre pondéré.

3. Montrer que $P(V)=0,6$.

4. Si Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol, quelle est la probabilité qu'il soit arrivé à l'aéroport en bus ? Justifier.

Partie 2

Les compagnies aériennes vendent plus de billets qu'il y a de place dans les avions car certains passagers ne se présentent pas à l'embarquement du vol sur lequel ils ont réservé.
On appelle cette pratique le surbooking.
Au vu des statistiques des vols précédents, la compagnie aérienne estime que chaque passager à 5 % de chance de ne pas se présenter à l'embarquement.
Considérons un vol dans un avion de 200 places pour lequel 206 billets ont été vendus. On suppose que la présence à l'embarquement de chaque est indépendante de celle des autres passagers et on appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de passagers se présentant à l'embarquement.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. En moyenne, combien de passagers vont-ils se présenter à l'embarquement ?

3. Calculer la probabilité que 201 passagers se présentent à l'embarquement.
Le résultat sera arrondi à 10^{-3} près.

4. Calculer $P(X\leqslant 200)$, le résultat sera arrondi à 10^{-3} près.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

5. La compagnie aérienne vend chaque billet à 250€.
Si plus de 200 passagers de présentent à l'embarquement, la compagnie doit rembourser le billet et payer une pénalité de 600€ à chaque passager lésé.
On appelle :
Y la variable aléatoire égale au nombre de passagers qui ne peuvent pas embarquer bien qu'ayant acheté un billet.
C la variable aléatoire qui totalise le chiffre d'affaires de la compagnie aérienne sur ce vol.
On admet que Y suit la loi de probabilité donnée par le tableau suivant :

y_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(Y=y_i)$	0.94775	0.03063	0.01441	0.00539	0.00151	0.00028	

5.a. Compléter la loi de probabilité donnée ci-dessus en calculant $P(Y=6)$.
5.b. Justifier que : $C=51500-850Y$.
5.c. Donner la loi de probabilité, de la variable C sous la forme d'un tableau.
Calculer l'espérance de la variable aléatoire C à l'euro près.
5.d. Comparer le chiffre d'affaires obtenu en vendant exactement 200 billets et le chiffre d'affaires moyen obtenu en pratiquant le surbooking.

CORRECTION

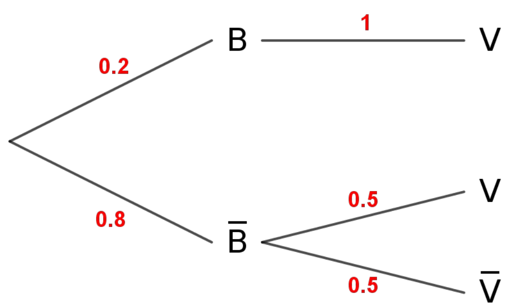
Partie 1

1. L'énoncé précise : Si Julien prend le bus de 8h il est sûr d'être à l'aéroport à temps pour son vol donc :
$P_B(V)=1$.

2. Julien est parti en retard de son appartement et la probabilité qu'il manque son bus est de 0,8 donc :
$P(\bar{B})=0{,}8$ et $P(B)=1-P(\bar{B})=1-08=0{,}2$.

. Si Julien manque son bus, il se rend à l'aéroport en prenant une compagnie de voitures privée, il a alors une probabilité de 0,5 d'être à l'heure à l'aéroport donc :
$P_{\bar{B}}(V)=0{,}5$ et $P_{\bar{B}}(\bar{V})=1-P_{\bar{B}}(V)=1-0{,}5=0{,}5$.

. On obtient l'arbre pondéré suivant :



3. En utilisant la formule des probabilités totales :
$P(V)=P(B\cap V)+P(\bar{B}\cap V)=P(B)\times P_B(V)+P(\bar{B})\times P_{\bar{B}}(V)$
$P(V)=0{,}2\times 1+0{,}8\times 0{,}5=0{,}2+0{,}4=0{,}6$.

4. On nous demande de calculer $P_V(B)$.
$$P_V(B)=\frac{P(V\cap B)}{P(V)}=\frac{0{,}2}{0{,}6}=\frac{1}{3}$$

Partie 2

1. On considère l'épreuve de Bernoulli suivante :
On choisit au hasard une personne ayant achetée un billet pour le vol considéré.
Succès S : « cette personne vient à l'embarquement » la probabilité de succès est : $p=0{,}95$.
Échec $\bar{S}$: « cette personne ne vient pas à l'embarquement » la probabilité de l'éhec est : $q=0{,}05$.
On suppose que la présence à l'embarquement de chaque passager est indépendante des autres passagers.
Si on considère les 206 personnes ayant achetées un billet, on effectue 206 épreuves indépendantes.
X est la variable aléatoire égale au nombre de succès en 206 épreuves.
La loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres $n=206$ et $p=0{,}95$.

2. $E(X)=206\times 0{,}95=195{,}7\simeq 196$
En moyenne 196 passagers seront à l'embarquement.

3. $P(X=201)=\binom{206}{201}\times 0{,}95^{201}\times 0{,}05^{5}\simeq 0{,}03063$ (en utilisant la calculatrice).
$P(X=201)=0{,}031$ (au millième près).

4. $P(X\leqslant 200)\simeq 0{,}94775$
$P(X\leqslant 200)=0{,}948$ (au millième près)
Pour 94,8 % des vols, il y aura au plus 200 passagers à l'embarquement donc aucun passager lésé.

5.a. On a $P(X=6)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)-P(X=3)-P(X=4)-P(X=5)$
On obtient : $P(X=6)=0{,}00003$.

y_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(Y=y_i)$	0.94775	0.03063	0.01441	0.00539	0.00151	0.00028	0.00003

5.b. Pour chaque passager lésé, la compagnie aérienne rembourse le billet : 250€ et 600€ de pénalité soit 850€.
Y est le nombre de passagers lésés.
La compagnie aérienne vend 206 billets à 250€ soit un total de $206\times250=51500$ € .
Pour Y personnes lésées le chiffre d'affaires est égal à : $C=51500-850\,Y$.

5.c. $c_0=51500$ $\qquad P(c_0)=P(Y=0)=0{,}94775$
$c_1=51500-850=50650$ $\qquad P(c_1)=P(Y=1)=0{,}03063$
$c_2=51500-2\times850=49800$ $\qquad P(c_2)=P(Y=2)=0{,}03063$
$c_3=51500-3\times850=48950$ $\qquad P(c_3)=P(Y=3)=0{,}01441$
$c_4=51500-4\times850=48100$ $\qquad P(c_4)=P(Y=4)=0{,}00151$
$c_5=51500-5\times850=47250$ $\qquad P(c_5)=P(Y=5)=0{,}00028$
$c_6=51500-6\times850=46400$ $\qquad P(c_6)=P(Y=6)=0{,}00003$

c_i	51500	50650	49800	48950	48100	47250	46400
$P(C=c_i)$	0.94775	0.03063	0.01441	0.00539	0.00151	0.00028	0.00003

On peut calculer E(C) en utilisant le tableau ci-dessus ou en remarquant que $E(C)=51500-850\times E(Y)$
On calcule $E(Y)=0{,}08324$ donc $E(C)=51500-850\times0{,}08324=51429{,}246$.
En arrondissant à l'euro : $E(C)=51429$ € .

5.c. Si la compagnie vend exactement 200 billets son chiffre d'affaires est $250\times200=50000$ € , en pratiquant le surbooking le chiffre d'affaires moyen est 51429€ donc la compagnie gagne en moyenne 1429€ de chiffre d'affaires, par vol.