Exercice 4 — 7 points

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thèmes: Suites numériques - Algorithme et programmation

On s'intéresse au développement d'une bactérie.
Dans l'exercice, on modélise son développement avec les hypothèses suivantes :
cette bactérie a une probabilité 0,3 de mourir sans descendance et une probabilité 0,7 de se diviser en deux bactéries filles.
Dans le cadre de cette expérience, on admet que les lois de reproduction des bactéries sont les mêmes pour toutes les générations de bactéries qu'elles soient mère ou fille.
Pour tout entier naturel n, on appelle p_n la probabilité d'obtenir au plus n descendances pour une bactérie.
On admet que, d'après ce modèle, la suite (p_n) est définie de la manière suivante :
$p_0=0,3$ et pour tout entier naturel n, $p_{n+1}=0,3+0,7\,p_n^2$.

1. La feuille de calcul ci-dessous donne des valeurs approchées des termes de la suite (p_n) .

	A	B
1	n	p_n
2	0	0.3
3	1	
4	2	
5	3	0.40769562
6	4	0.416351
7	5	0.42134371
8	6	0.42427137
9	7	0.42600433
10	8	0.42703578
11	9	0.42765169
12	10	0.42802018
13	11	0.42824089
14	12	0.42837313
15	13	0.42845251
16	14	0.42850009
17	15	0..42852863
18	16	0.42854575
19	17	0.42855602

1.a. Déterminer les valeurs exactes de p_1 et p_2 .
1.b. Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, d'obtenir au moins 11 générations de bactéries à partir d'une bactérie de ce type ?
1.c. Formuler les conjectures sur les variations et la convergence de la suite (p_n) .

2.a. Démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $0\leqslant p_n\leqslant p_{n+1}\leqslant 0,5$.
2.b. Justifier que la suite (p_n) est convergente .

3. On appelle L la limite de la suite (p_n) .
3.a. Justifier que L est solution de l'équation :
$0,7\,x^2-x+0,3=0$
3.b. Déterminer, alors la limite de la suite (p_n) .

4. La fonction suivante, écrite en langage Python, a pour objectif de renvoyer les n premiers termes de la suite (p_n) .

```
1 def suite(n):
2   p= . . .
3   s=[p]
4   for i in range( .):
5     p= . . .
6     s.append(p)
7   return(s)
```

Recopier, sur votre copie, cette fonction en complétant les lignes 2, 4 et 5 de façon à ce que la suite(n) retourne, sous forme de liste, les n premiers termes de la suite (p_n).

CORRECTION

1.a. $p_0=0,3$ $\quad p_1=0,3+0,7\,p_0^2=0,3+0,7\times 0,3^2=0,3+0,7\times 0,09=0,3+0,063=0,363$ $\quad p_1=0,363$

$p_2=0,3+0,7\,p_1^2=0,3+0,7\times 0,363^2=0,3+0,0922383=0,3922383$ $\quad p_2=0,3922383$

1.b. La probabilité d'obtenir au moins 11 générations est : $1-p_{10}$.

$1-p_{10}=1-0,428=0,572$ à 10^{-3} près.

1.c. Conjectures : (p_n) est une suite croissante et convergente.

2.a. On veut démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, $0\leqslant p_n\leqslant p_{n+1}\leqslant 0,5$.

Initialisation

$p_0=0,3$ et $p_1=0,363$ donc $0\leqslant p_0\leqslant p_1\leqslant 0,5$

La propriété est vérifiée pour n=0.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire pour tout entier naturel n, on suppose que : $0\leqslant p_n\leqslant p_{n+1}\leqslant 0,5$ et on doit démontrer que $0\leqslant p_{n+1}\leqslant p_{n+2}\leqslant 0,5$.

Si $0\leqslant p_n\leqslant p_{n+1}\leqslant 0,5$ alors $0\leqslant p_n^2\leqslant p_{n+1}^2\leqslant 0,5^2=0,25$ car la fonction carré est croissante sur $[0;+\infty[$

et $0,7>1$ donc $0\leqslant 0,7\times p_n^2\leqslant 0,7\times p_{n+1}^2\leqslant 0,7\times 0,25=0,175$

et $0\leqslant 0,3+0\leqslant 0,3+0,7\,p_n^2\leqslant 0,3+0,7\,p_{n+1}^2\leqslant 0,3+0,175=0,475\leqslant 0,5$

donc $0\leqslant p_{n+1}\leqslant p_{n+2}\leqslant 0,5$.

Conclusion

Le principe de récurrence nous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, $0\leqslant p_n\leqslant p_{n+1}\leqslant 0,5$.

2.b. Pour tout entier naturel n, $p_n\leqslant p_{n+1}$ donc la suite (p_n) est croissante.

Pour tout entier naturel n, $p_n\leqslant 0,5$ donc la suite (p_n) est majorée par 0,5.

La suite (p_n) est croissante et majorée donc convergente.

3. On note : $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n=L$ $\quad$ Pour tout naturel n, on a $p_n\leqslant 0,5$ donc $L\leqslant 0,5$.

3.a. Pour tout entier naturel n, $p_{n+1}=0,3+0,7\,p_n^2$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} p_n=L$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} p_{n+1}=L$

donc $L=0,3+0,7\,L^2 \Leftrightarrow 0,7\,L^2-L+0,3=0$ et 1 est solution de l'équation $0,7\,x^2-x+0,3=0$.

3.b. $0,7\,x^2-x+0,3=0$

$\Delta=(-1)^2-4\times 0,3\times 0,1-0,84=0,16=0,4^2$

$$x_1=\frac{1-0,4}{2\times 0,7}=\frac{0,6}{1,4}=\frac{3}{7} \qquad x_2=\frac{1+0,4}{2\times 0,7}=\frac{1,4}{1,4}=1$$

$x_2>0,5$ et $0\leqslant x_1\leqslant 0,5$ donc $L=x_1=\dfrac{3}{7}$.

4.

```
def suite(n):
  p= 0.3
  s=[p]
  for i in range( n-1 ):
    p=  0.3+p**2
    s.append(p)
  return(s)
```