Exercice 1 — 7 points

Afrique du Sud-Bulgarie-Comores-Djibouti-Kenya-Liban-Lituanie-Madagascar-Mozambique-Ukraine

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thème: Probabilités

Les résultats seront arrondis, si besoin, à 10^{-4} près.
Une étude statistique réalisée dans une entreprise fournit les informations suivantes :
. 48 % des salariés sont des femmes. Parmi elles, 16,5 % exercent une profession de cadre ;
. 52 % des salariés sont des hommes ; Parmi eux, 21,5 % exercent une profession de cadre.
On choisit une personne au hasard parmi les salariés.
On considère les événements suivants.
. F : « la personne choisie est une femme » ;
. C : « la personne choisie exerce une profession de cadre ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité que la personne choisie soit une femme qui exerce une profession de cadre.

3.a. Démontrer que la probabilité que la personne choisie exerce une profession de cadre est égale à 0,191.
3.b. Les éléments F et C sont-ils indépendants ? Justifier.

4. Calculer la probabilité de F sachant C notée $P_C(F)$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

5. On choisit au hasard un échantillon de 15 salariés.
Le grand nombre de salariés de l'entreprise permet d'assimiler ce choix à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de cadres au sein de l'échantillon de 15 salariés.
On rappelle que la probabilité qu'un salarié choisi au hasard soit un cadre est égale à 0,191.
5.a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
5.b. Calculer la probabilité que l'échantillon contienne au plus un cadre.
5.c. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X.

6. Soit n un entier naturel.
Quelle doit-être la valeur minimale de n pour que la probabilité qu'il y ait au moins un cadre au sein de l'échantillon soit supérieur ou égale à 0,99 ?

CORRECTION

1. L'énoncé précise :

. 48 % des salariés sont des femmes donc :

$P(F)=\frac{48}{100}=0{,}48$ et $P(\bar{F})=1-0{,}48=0{,}52$

$\bar{F}$: « la personne choisie est un homme ».

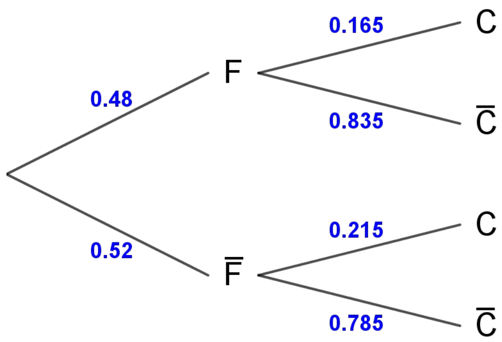
. Parmi les femmes, 16,5 % exercent une profession de cadre.

$P_F(C)=\frac{16{,}5}{100}=0{,}165$ et $P_F(\bar{C})=1-0{,}165=0{,}835$

. Parmi les hommes, 21,5 % exercent une profession de cadre.

$P_{\bar{F}}(C)=\frac{21{,}5}{100}=0{,}215$ et $P_{\bar{F}}(\bar{C})=1-0{,}215=0{,}785$

. La situation est représentée par l'arbre pondéré suivant :



2. $P(F\cap C)=P(F)\times P_F(C)=0{,}48\times 0{,}165=0{,}0792$

3.a. En utilisant la formule des probabilités totales

$P(C)=(F\cap C)+P(\bar{F}\cap C)$

$P(\bar{F}\cap C)=P(\bar{F})\times P_{\bar{F}}(C)=0{,}52\times 0{,}215=0{,}1118$

$P(C)=0{,}0792+0{,}1118=0{,}191$.

3.b. $P(F)\times P(C)=0{,}48\times 0{,}191=0{,}09168$

$P(F\cap C)\neq P(F)\times P(C)$ donc les événements F et C ne sont pas indépendants.

4. $P_C(F)=\frac{P(F\cap C)}{P(C)}=\frac{0{,}0792}{0{,}191}=\frac{792}{1910}=0{,}4147$ à 10^{-4} près.

5. On considère l'épreuve de Bernoulli :
On choisit au hasard une personne parmi les salariés de l'entreprise.
Succès $S=C$: « la personne choisie au hasard est une personne qui exerce une profession de cadre ».
La probabilité de succès est : $p=P(C)=0{,}191$.
Échec $\bar{S}=\bar{C}$: « la personne choisie au hasard est une personne qui n'exerce pas une profession de cadre ».
La probabilité de l'échec est : $q=P(\bar{C})=0{,}809$.
On considère un échantillon de 15 salariés que l'on peut considérer comme un tirage de personnes avec remise.
On effectue donc 15 épreuves de Bernoulli indépendantes.

5.a. X est la variable aléatoire égale au nombre de succès en 15 épreuves.
La loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres $n=15$ et $p=0{,}191$.

5.b. $P(X\leqslant 1)=P(X=0)+P(X=1)$

$P(X=0)=q^{15}=0{,}809^{15}=0{,}0416$ à 10^{-4} près.

$P(X=1)=\binom{15}{1}p^1\times q^{14}=15\times 0{,}191\times 0{,}809^{14}=0{,}1474$

$P(X\leqslant 1)=0{,}0416+0{,}1474=0{,}189$

5.c. $E(X)=n\times p=15\times 0{,}191=2{,}865$

6. Pour un échantillon de n salariés. $(n\in\mathbb{N})$

$P(1\leqslant X)=1-P(X=0)$ $\qquad P(X=0)=0{,}809^n$

$P(X\leqslant 1)\geqslant 0{,}99 \iff 1-0{,}809^n\geqslant 0{,}99 \iff 1-0{,}99\geqslant 0{,}809^n \iff 0{,}01\geqslant 0{,}809^n$

ln est une fonction croissante sur $]0;+\infty[$.

$\iff \ln(0{,}01)\geqslant \ln(0{,}809^n) \iff \ln(0{,}01)\geqslant n\times\ln(0{,}809)$

$0<0{,}809<1$ donc $\ln(0{,}809)<0$

$\iff \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}809)}\leqslant n$

En utilisant la calculatrice : $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}809)}\simeq 21{,}73$ n est un entier naturel donc

$\iff 22\leqslant n$

Il faut donc un échantillon de 22 salariés pour que la probabilité qu'il y ait au moins un cadre au sein de l'échantillon soit supérieure ou égale à 0,99.