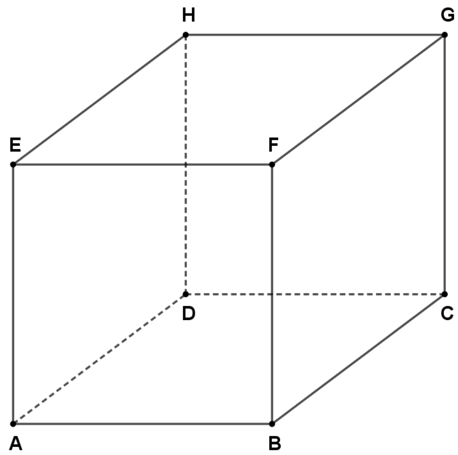
Exercice 2 — 7 points

Afrique du Sud-Bulgarie-Comores-Djibouti-Kenya-Liban-Lituanie-Madagascar-Mozambique-Ukraine

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les quatre et ***ne doit traiter que ces 3 exercices.***
Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20).
Les traces de recherche , même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Thème: Géométrie de l'espace

On considère un cube ABCDEFGH de côté 1, ci-dessous :



On munit l'espace d'un repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.

1.a. Justifier que les droites (AH) et (ED) sont perpendiculaires.
1.b. Justifier que la droite (GH) est orthogonale au plan (EDH).
1.c. En déduire que la droite (ED) est orthogonale au plan (AGH).

2. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{ED}$.
Déduire de la question **1.c.** qu'une équation cartésienne du plan (AGH) est : $y-z=0$.

3. On désigne par L le point de coordonnées $\left(\frac{2}{3};1;0\right)$.

3.a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EL).
3.b. Déterminer l'intersection de la droite (EL) et du plan (AGH).
3.c. Démontrer que le projeté orthogonal du point L sur le plan (AGH) est le point K de coordonnées $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

3.d. Montrer que la distance du point L au plan (AGH) est égale à $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.e. Déterminer la valeur du tétraèdre LAGH.
On rappelle le volume V d'un tétraèdre est donné » par la formule :
$V=\frac{1}{3}\times(\text{aire de la base})\times\text{hauteur}$

CORRECTION

1.a. ADHE est un carré, ses diagonales sont perpendiculaires.
Donc (AH) et (ED) sont des droites perpendiculaires.

1.b. (GH) est perpendiculaire à (EH) car EFGH est un carré.
(GH) est perpendiculaire à (HD) car CDHG est un carré.
(GH) est perpendiculaire à deux droites sécantes du plan (EDH).
Donc (GH) est orthogonale au plan (EDH).

1.c. (GH) est orthogonale au plan (EDH) et (ED) est contenue dans le plan (EDH).
Donc (GH) est orthogonale à (ED).
(ED) est perpendiculaire à la droite (AH) et orthogonale à (GH), donc (ED) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (AGH) et (ED) est orthogonale au plan (AGH).

2. $E(0;0;1)$ $D(0;1,0)$ $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ $M(x;y;z)$ $A(0:0;0)$ $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$M\in(AGH) \Leftrightarrow \overrightarrow{ED}.\overrightarrow{AM}=0 \Leftrightarrow 0\times x+1\times y-1\times z=0 \Leftrightarrow y-z=0$.

3.a. $E(0;0;1)$ $L\left(\frac{2}{3};1;0\right)$ $\overrightarrow{EL}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\1\\-1\end{pmatrix}$

$$(EL):\begin{cases}x=\frac{2}{3}\times t+0\\ y=1\times t+0\\ z=-1\times t+1\end{cases}\quad t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow (EL):\begin{cases}x=\frac{2}{3}t\\ y=t\\ z=-t+1\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$$

3.b. On résout le système :

$$\begin{cases}y-z=0\\ x=\frac{2}{3}t\\ y=t\\ z=-t+1\end{cases}$$ On obtient : $t-(-t+1)=0 \Leftrightarrow 2t=1 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$

$x=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$ $y=\frac{1}{2}$ $z=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$

Les coordonnées du point d'intersection de la droite (EL) et du plan (AGH) sont $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

3.c. $K\left(\frac{2}{3};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et $(AGH):\ y-z=0$ $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$ donc $K\in(AGH)$ $L\left(\frac{2}{3};1;0\right)$

$\overrightarrow{LK}\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{LK}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{ED}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont colinéaires et la droite (ED) est orthogonale au plan (AGH) donc la droite (LK) est orthogonale au plan (AGH) et K appartient au plan (AGH) et K est le projeté orthogonal de L sur le plan (AGH).

3.d. $LK^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ $\quad LK=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

La distance du point L au plan (AGH) est égale à : $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (en unité de longueur).

3.e. Dans le tétraèdre LAGH, la hauteur correspondante à la base AGH est $LK=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Le triangle AGH est rectangle en H.
$HG=1$ et $AH=\sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté 1).
L'aire de AGH est égale à : $\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (en unité d'aire).

Le volume du tétraèdre LAGH est : $V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$ (en unité de volume).